HACIA UNA LÓGICA DE SIGNIFICADOS

JEAN PIAGET

ROLANDO GARCÍA

Con la colaboración de L. Banks, I. Bertoud, D. de Caprona, S. Dionnet, J. Guyon, A. Henriques, V. Jacq, D. Maurice, G. Merzaghi, C. Monnier, G. Piéraut-Le Bonniec, E. Rappe du Cher, A. Ritter, A. Sinclair, C. Vachta, B. Vitale, A. Wells, M. Zinder y R. Zubel

Derechos de Autor © 1991 por Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Todos los derechos reservados. Ninguna página de este libro puede ser reproducida de ninguna forma, por fotostática, microforma, sistema de recuperación ó cualquiera otros medios, sin el permiso previo por escrito del publicista.

Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Publishers 365 Broadway Hillsdale, New Jersey 07642

Este libro es una traducción de la versión original en francés publicada por Murionde Geneve en 1987.

Biblioteca del Congreso Fecha del Catálogo de Publicación

Piaget, Jean, 1896-

Hacia una lógica de significados/ Jean Piaget, Rolando García; con la colaboración de L. Banks . . . [y compañeros]; prefacio por Barber Inhelder; editado por Phillip M. Davidson & Jack Easley.

p. cm.

Incluye referencias bibliográficas e índice.

ISBN 0-8058-0301-7

1. Significado (Sicología) 2. Lógica. 3. Teoría del Conocimiento. I. García, Rolando. II. Banks, L. III. Davidson, Phillip Minor. IV. Easley, J. A. V. Título.

153.4’3 – dc 20

91 – 12701

CIP

Impreso en los Estados Unidos de América

10 9 8 7 6 5 4 3 2

CONTENIDO

Prefacio por B. Inhelder
Comentarios de los Editores
PARTE UNO por Jean Piaget
Introducción
    Conducta Instrumental
Capítulo 2: Desplazamientos en una Dificultosa Estructura
Capítulo 3: Hacer un mosaico
Capítulo 4: Implicaciones Aritméticas y Significados
    I. Números Ordinales y Cardinales
    II. Conteo en un Orden Circular
Capítulo 5: Relaciones dentro de un Objeto
Capítulo 6: Negación Inter.-Objeto e Incompatibilidad
    I. Negación
    II. Incompatibilidad
Capítulo 7: Entrelace
Capítulo 8: Los significados de Colecciones
    I. Modificaciones en la Construcción de una Serie
    II. Los significados y Razones Internas para las Colecciones
    III. Transformaciones de Estructuras
    IV. Actividades Espontáneas
Capítulo 9: Clasificaciones y Simetrías
Conclusiones
PARTE DOS por Rolando García
Capítulo 10: Lógica y Epistemología Genética
Capítulo 11: Lógica Extensional y Lógica Intencional
Capítulo 12: Conclusiones Generales

PREF ACIO

Me parece que la importancia de este libro es que responde a ambas corrientes referentes al significado y representación en sicología y a un renovado interés de lógica contemporánea en el problema de relevancia. El libro es un recuento de investigaciones que Jean Piaget elaboró y llevó a cabo con sus colaboradores en el International Center for Genetic Epistemology en 1979-79. Este es el más reciente libro que Piaget escribió. Ambos, la terminación de una serie de trabajos y la apertura de una nueva perspectiva, este volumen intenta reformar la lógica operatoria, extendiéndose en dos direcciones: hacia la construcción de una lógica de significados, del cual la lógica operatoria naturalmente aparecerá y hacia la formulación de una nueva lógica proposicional, la cual ha estado ligada muy estrechamente con la lógica extensional.

Como en Psychogenesis and the History of Science, [1] la colaboración de Jean Piaget con Rolando García probó ser fructífera desde el mero principio de esta investigación experimental y teórica. A través de intensos intercambios de ideas, notas y memos, los autores interactuaron en todas las etapas en la elaboración del marco conceptual de la investigación. Piaget concentrado dentro de una teoría de significado en lógica natural, con García enriquecido con su profundo conocimiento de teorías lógicas contemporáneas.

El libro está dividido en dos partes. La Parte I incluye el texto de Piaget, el cual él ha esperado completar integrándolo con los resultados de García. Como él desafortunadamente no tuvo tempo para hacer una síntesis, García la efectuó en sus “Conclusiones Generales”

Piaget intentó traer a la luz las verdaderas raíces de la lógica, retrocediendo a las implicaciones entre las acciones sensomotoras. Tal lógica solo puede ser una lógica de significado donde las implicaciones no están restringidas a exposiciones: a la vista del sujeto, cada acción u operación está dotada con significados; por consiguiente, uno debe tratar con sistemas de implicaciones dentro de los significados de acciones y la causalidad de acciones son cuidadosamente distinguidas, las expectativas y anticipaciones del sujeto sobre la concatenación de acciones conducen a atestiguar la existencia de tempranas inferencias. Por lo tanto, una forma privilegiada de inferencia es la acción implicación, la cual es una implicación entre los significados de acciones. Piaget estuvo de este modo iniciando la investigación sobre una “protológica” en la cual formas y contenidos son menos diferenciados que en sistemas operatorios. Posteriormente sus investigaciones de correspondencias, [2] dialécticas elementales, [3] y lógica categorial, * (* = 4) en las cuales él introdujo las etapas elementales y formativas de las operaciones, Piaget fue profundizando su estudio de modos de conocimiento que son usados como herramientas cognitivas mucho antes que el sujeto pueda tematizarlas.

En la parte II del libro, García destaca la contribución original de Piaget a la lógica de significados, una contribución que será totalmente entendida solo dentro del marco de la epistemología genética. En el capítulo titulado “Lógica y Epistemología Genética”, García enfatiza que el propósito de Piaget no fue primariamente hacer una contribución a la lógica como tal, sino desarrollar un método de análisis epistemiológico. Esperamos que esto despejará todos los muy frecuentes malentendidos de ciertas formalizaciones que Piaget ha propuesto para analizar las normas de racionalidad en todos los niveles de desarrollo.

Cuando leemos el capítulo de “la Lógica Extensional y la Lógica Intencional”, los no especialistas estarán agradecidos a García por darles a conocer con el trabajo de Anderson y Belnap de la relevancia y necesidad en lógica y por establecer con gran claridad las similitudes y diferencias entre lógica operatoria y la lógica de relevancia. García ve la última como un substrato necesario para el anterior y es el primero en mostrar cuan fructífero puede ser el estudio conjunto de éstas lógicas.

Finalmente, en sus “Conclusiones Generales”, las cuales iluminan el trabajo global, García da una magistral interpretación de todos los nuevos descubrimientos en el libro. El enfatiza en un descubrimiento que aparentemente contradice los estudios que hemos concluido anteriormente: la formación temprana al nivel de acciones y en el contexto de significados, de operaciones que, aunque no han sido integrados dentro un todo estructurado, son isomórficos para las 16 operaciones binarias de la lógica proposicional. Estos fragmentos de estructuras llegan a ser progresivamente coordinados y eventualmente constituyen los agrupamientos y finalmente el grupo INRC. A este respecto, permítasenos hacer notar que García atribuye una función dual atributiva e integrativa al proceso de asimilación, de ese modo mostrando que una lógica de significados subraya que la lógica de exposiciones deberá ser ambas, intencional y extensional.

Más allá de debates finales, este libro abre nuevas perspectivas. Concordamos con la visión de García de una ampliamente científica y por consiguiente modificable epistemiología, la cual sola puede tratar con ella y renovar un clásico resultado como el problema de significado. Más aún, el análisis permite estimular la comprensión de la lógica de acciones y los varios fenómenos ligados a una atribución de significados en la actividad cognitiva de un niño. Amplias áreas de sicología están relacionadas con las intenciones, objetivos y representaciones significativas subrayando las conductas cognitivas. Este libro ciertamente contribuirá a esclarecer tales interrogantes, a través de una aproximación interdisciplinaria típicamente Pagetiana que ha probado ser fructífera en el pasado, y la cual hará del libro de interés para logicianos, epistemiologistas, sicólogos y para todos los investigadores que son receptivos a nuevos acercamientos al significado.

Cordialmente agradecemos a nuestro colega J. B. Grize por su cuidadosa lectura manuscritas de Piaget que tratan sobre la lógica, y a P. M. Davidson y J. Easley por su notable edición de la traducción al inglés. También agradecemos a E. Ferreiro y S. Dionnet por editar las partes experimentales, a D. de Caprona y P. M. Davidson por traducir al inglés la Parte I del libro, a P. Steenken por el trabajo artístico y a todos los colaboradores en el Centro Internacional para Epistemiología Genética y a la fundación de archivos de Jean Piaget. Una vez más, la investigación y escritura fueron posibles gracias a los subsidios de la Fundación Nacional Suisa para la Investigación Científica, la Fundación Ford y la Fundación Jean Piaget para la Investigación Sicológica y Epistemiológica.

Bärbel Inhelder

---

[1] Piaget J., & García R. Psychogenesis and the History of Science. (H, Feider, trans.) New York: Columbia University Press, 1989. (Original work published 1983)

[2] Piaget J. *Recherches sur les correspondences*. (Etudes d’Epistémologie Génétique, vol. 37.) Paris: P:U:F:, 1980

[3] Piaget J. *Les formes élémentaires de la dialectique.* Paris: Gallimard, 1980.
(4) Piaget J,; en colaboración con G. Henriques y E. Ascher. Morphims and Categories: To Compare and Transform (T. Brown, trans.) Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaumm Associates, in press.

COMENTARIOS DE LOS EDITORES

Las dos primeras frases de la Introducción de Piaget a este libro se refieren a lógica operatoria e intención lógica. Unas pocas observaciones sobre estos conceptos pueden ser en orden, especialmente desde que las propuestas de Piaget sobre lógica operatoria han sido malentendidas en el pasado.

Los libros de Inhelder y Piaget sobre pensamiento lógico (5), han sido criticados por logicianos por su uso de la lógica y sus demandas sobre las habilidades lógicas de los niños. Papert (6) lo expresó bien cuando escribió, "Qué reprochan los logicianos a Piaget siendo a menudo exacto en lo mejor que ha hecho", señalado para inventar un nuevo uso para ideas lógicas originalmente desarrolladas para otros propósitos. Él nota que realmente no hay elección en iniciar un muevo campo – uno tiene que utilizar instrumentos existentes que fueron desarrollados para otros campos. En lugar de considerar la lógica como reglas de inferencias válidas o como un método de evitar sistemáticamente equivocaciones o razonamiento inválido, Piaget ha utilizado su sentido y algunos de sus conceptos en lugar de hacer un modelo (7) para describir el desarrollo intelectual de los niños, el que progresa a través de etapas de las que es a menudo técnicamente ilógico el razonamiento. Esto sirve su mayor propósito epistemiológico, largamente ignorado por logicianos, para explicar el razonamiento lógico – especialmente respecto a número, geometría y partes de la física – han surgido conceptualmente, paso por paso, fuera de acciones. Otra forma de ver la lógica operatoria de Piaget es notar que en las entrevistas clínicas las cuales proveen los datos básicos de su investigación, los niños frecuentemente usan formas lógicas para sugerir nuevas formas de pensamiento sobre un problema: ellos los usan heuristicamente (?), no solo para examinar deductivamente la validez de las inferencias, como en la aplicación formal de la lógica.

En el presente volumen Piaget y García amplían y revisan el trabajo temprano sobre lógica operatoria analizando el significado de las relaciones en entrevistas clínicas y por incorporación de una lógica de intenciones (derivada por Anderson y Belnap (8) del trabajo sobre deducción natural por Gentzen y muchos otros).

Webster's Second International Dictionary (1950) da la siguiente definición de "intención" en el campo de la lógica: "La suma de atributos, calidades ó marcas comprendidas en un concepto ó implicadas en un término; la esencia, contenido o connotación; de este modo la "intención" del triángulo implica ó incluye que se trata de una 'figura plana'". *Webster's Tirad New International Dictionary* (1970) agrega, "contrastado con extensión". Para considerar todos los significados Webster alude a que uno debe tener que leer mucho de filosofía. Por ejemplo, el volumen Schilpp sobre Rudolf Camap (9) contiene artículos de seis filósofos de alguna manera

similarmente orientados, tratando sobre la distinción intención-extensión y la réplica de Camap a ellos. Lectores que están interesados en los resultados lógicos lanzados por el presente volumen pueden también volver a un número de otros recursos útiles.

El siguiente comentario está dirigido a lectores que están familiarizados con el uso de la distinción intención-extensión de Piaget de escritos previos. Por ejemplo, en su trabajo sobre lógica temprana, Inhelder y Piaget (1964) [1] estudiaron la diferenciación de una niños de una intención de clase por su extensión. Y Piaget ha caracterizado consistentemente la comparación de un todo de su parte como "intensiva" cuantificación (7) porque involucra razonamiento cualitativo como contrastado con el razonamiento numérico requerido en comparar dos sets de elementos. De este modo, estas previas usanzas pertenecen a la adquisición de los niños de conceptos específicos. En contraste, el presente uso pertenece a los fundamentos de pensamiento por sí mismos, puesto que como Piaget propone relevancia e intención como las bases para una deducción natural.

El problema central para el presente proyecto es descubrir los orígenes de la relevancia como una relación entre intenciones, y el papel de la relevancia en el desarrollo de una lógica natural. Piaget muestra, en el Capítulo 1, como un gancho es relevante para un infante para colgar un mono de juguete con la cola arrollada en espiral. Parte del significado de un gancho es que hay espirales donde el gancho puede entrar, de este modo sosteniendo otro objeto ó sujetando dos objetos juntos. Parte del significado de la cola del mono arrollada en espiral es que se puede colgar al mono de un soporte. Las intenciones de dos objetos son relevantes entre sí y para la intención que el niño desea del juguete. García entonces demuestra como la lógica de vinculación de Anderson & Belnap puede ser adaptada al análisis de Piaget de la conducta de los niños.

Piaget escribió en 1980, el año en que murió, "Nuestro más reciente trabajo... sobre las nociones de posibilidad y necesidad seguida por aquella sobre la construcción de una lógica de significados, provee sólidos argumentos esclarecedores a favor de una teoría constructivista y su explicación de la elaboración de nuevos conceptos y operaciones". Entre éstos argumentos está que la lógica de significados es un instrumento natural para describir equilibrios "aumentativos", esos que guían a construcciones enriquecidas: "A todos los niveles de desarrollo hay implicaciones entre acciones o significados; entonces hay relaciones dialécticas que guían al sujeto a ir más allá de lo que él actualmente ha adquirido" (8). Igualmente importante es que la formulación intencional evita las paradojas la lógica extensional y la implicación material, de acuerdo a la cual "p implica a q cualquiera que sea la relación entre p y q y sin que haya ningún enlace entre sus significados" (12).

En la edición de éste volumen hemos estado, a veces, asustados por el cambio de perspectiva requerido en pensar intencionalmente mas que extensionalmente sobre ciertos contextos familiares. Por ejemplo, cuando Piaget dice que el número de posibles segundos elementos en contar alrededor de un círculo de botones es *dos veces* el número de botones – debido a las dos posibles direcciones del conteo – él está pensando en el "segundo elemento" como una intención que es distinta de la extensión literal. Los lectores pueden haber experimentado un desconcierto similar en el primer encuentro con varias definiciones intencionales bien conocidas ("estrella matutina" no significa la misma cosa que "estrella vespertina"; la intención de los "triángulos equiangulares" difiere de aquella de "triángulos equiláteros").

Como un profesor educador, uno de nosotros (J.E.) hace notar que la enseñanza, especialmente en matemáticas, a menudo involucra un esfuerzo para erradicar el razonamiento intencional en favor del razonamiento extensional. Un efecto colateral puede ser la extendida reducción de las matemáticas a computación sin sentido para ambos, catedráticos y alumnos. En cualquier caso, está claro que el entrenamiento prioritario de uno puede ayudar o entorpecer la asimilación de uno de esta articulación final de la lógica operatoria de Piaget. Afortunadamente, Piaget sigue su formato usual, explorando el desarrollo de las inferencias de significado de los niños desde una variedad de ángulos hasta que el modelo sea ineludible. Hemos añadido, no obstante, notas al pie de página cuando el texto es menos claro, las cuales serán de valor, esperamos, para al menos algunos lectores.

P. M. Davidson and Jack Editors Easley

---

(5) Inhelder B. & Piaget J. *The Early Growth of Logic: Cassification and Seriation.* NewYork: Harper & Row, 1964; and *The Growth of logical Thinking: From Childhood to Adolescence. New York*: Basic Books, 1958.
(6) Papert S. *@Sur la logique Piagétienne",* in *La filiation des strutures. (Etudes d'Epistémologie Génétique, No. 15.)* Paris: P.U.F., 1963.
(7) See *Piaget Essai de logique opératoire.* (Paris: Dunod, 1972). The general idea is sketched in Piaget *Logic and Psychology, Manchester University Press,* 1953.
(8) Anderson & Belnap N. D: Entailment: *The Logic of Relevance and Necessity.* Princeton: Princeton University Press, 1975.
(9) Schilpp P. A. *The Philosophy of Rudolf Carnap.* La Salle, IL: Open Court, 1963.
(10) See, for example, Berlin I., "*Logical Translation"* in H. Hardy (Ed.), *Concepts and Categories* – Philosophical Essays. New York: Viking Press, 1979; Carnap R., *Introduction to Symbolic Logic and its Applications, (pp. 39-42, 98-100).* New York: Dover Publications, 1958; Goddard L., & Routley R. *The Logic of Significance and Context.* Edinbourgh: Scottish Academic Press, 1973, (Chapter 7); Haack S. *Philosophy of Logics.* Cambirdge University Press, 1978, (pp. 175-203); Quine W. V. O. *Word and Object – AN inquiry into the Linguistic Mechanisms of Objective Reference.* Cambiridge, MA: The Technology Press & Wiley, 1960, (pp. 164ff, pp. 212ff); Van Benthem, J. *A Manual of Intensional Logic.* Stanford, CA: Center for the Study of Language and Information, 1988; Zalta E. N. *Intensional Logic and the Metaphysics of Intentionality.* Cambridge, MA: MIT Press, 1988, y and of course Anderson A. R., & Belnap N. D., op. cit.
(11) Piaget J., & Inhelder B. *The Cihld's Construction of Quantities: Conservation and Atomism.* London: Routledge & Kegan Paul, 1975, pp. 18-21.
(12) Piaget J. *"Recent Studies in Genetic Epistemology,"* in *Cahiers de la Fondation archives Jean Piaget,* No. 1. Genéve: Fondation Archives Jean Piaget, 1980, pp. 3-7.

PARTE UNO

Por Jean Piaget Traducida por D. de Caprona y P. M. Davidson

INTRODUCCIÓN

Nuestro principal propósito en este libro es completar y enmendar nuestra lógica operatoria en la dirección de una lógica de significados. Es tan cierta una lógica en el sentido extensional del término y es por lo tanto en el sentido intencional que tendremos para especificar el uso de conexiones lógicas tales como “y” e “o” y ,sobre todo, el uso de “implicaciones de significado” en oposición a las “implicaciones materiales”. La diferencia entre los dos tipos de implicaciones es que la última está definida con respecto a los verdaderos valores de los planteamientos no importando sus significados o el significado de la relación entre ellos. De este modo, considerando solo extensiones, si satisfacen que cualquier término de la disyunción (p˙q) V (p+˙¯q) V (p+¯˙q̃) sea cierta en orden de derivar la implicación pƆq – aunque no haya ninguna relación significativa entre p y q. Esta es la fuente de algunas bien conocidas paradojas (13).

Por consiguiente, es esencial construir una lógica de significados a cuya mayor operación llamaremos una “implicación de significado”: p implica a q (escrito p→q) si un significado m de q está enclavado en el significado de p y si este significado m es transitivo. (14) En este caso, los enclavamientos de varios significados acordes a su relativa comprensión – a los que llamaremos “inherencias”, corresponden a alojamientos extensionales y por lo tanto a formas de tablas de verdad. Sin embargo, tales verdaderas tablas son parciales y están determinadas por significados y las negaciones están relativizadas por estos alojamientos tomados como marcos de referencia. (15)

---

(13) Las paradojas de implicación material, las cuales derivan del hecho de que p materialmente implica a q si p es falso o q es verdadero, incluye los siguientes teoremas: p → (q→p); p→(p→q) V (q→p). Para discusiones, vea Anderson A.R.&Belnap N.D., Vinculación: *La lógica de la Relevancia y la Necesidad,* Princeton: Princeton University Press, 1975, pp. 3-17; Haac S. *Filosofía de las Lógicas,* Cambridge: Cambridge Press, 1978, pp. 176-203. (P.M.D.)

(14) Puesto que la transitividad es una propiedad de relaciones, parecería que esto se refiere a la relación de compartición de significados. De este modo para decir que el significado m es transitivo significa que r comparte a m con q y q comparte a comparte con p, entonces r comparte a m con p. El punto está clarificado un poco por Piaget en “Recent Studies in Genetic Epistemology”. *Cahiers de la Fondation Archives Jean Piaget,* No. 1, 1980, p.5. (P.M.D.)

.(15) Estos significados, por ejemplo, desde que la clase de cuadrados está incluída en la clase de rectángulos, si s = “ésta figura es un cuadrado”, entonces S -- “que ésta figura nos es un cuadrado” – no significa que es cualquier cosa del todo, sino solo que no es un rectángulo.

[Parecería que las últimas cuatro palabras “no es un rectángulo” pudieran haber sido pensadas para leer “un rectángulo no equilátero”. En este simple caso implicando dos intenciones, cuadratividad (s) está relativisado a rectangularidad y obtenemos la tabla verdadera “parcial” siguiente:

S	r	S	S→r
T	T	F	T
T	F	F	F
F	T	T	x

F F T y

Si tal lógica de significados realmente existe, por la que deba ser limitada a proposiciones o declaraciones, porque cualquier acción u operación también tiene significados. Como ninguna acción, ninguna operación y sobre todo ningún significado está aislado pero está unido con muchos otros, existen implicaciones entre los significados de acciones o de operaciones, Tales implicaciones con distintas aunque inseparables del aspecto casual, o de la ejecución actual, de las acciones.

Nuestro segundo propósito por consiguiente es el de avanzar el análisis de implicaciones entre acciones y operaciones, regresando tan lejos como sea posible al nivel de acciones prácticas y en la dirección de las inferencias más elementales. Al nivel de operaciones verdaderas (alrededor de seis o diez años), el análisis es derecho. Por ejemplo, una operación que combina objetos x dentro de una clase obviamente implica una exclusión de objetos y (ó no x). Como dijo Espinoza, *omnis determinatio est negatio.* Pero con respecto a las acciones prácticas, debemos distinguir sus aspectos causales (el resultado que es verificable después del hecho) de sus anticipaciones, las que son inferentes. Una acción en sí misma no es cierta ni falsa y es evaluada son en términos de efectividad o utilidad en relación a un objetivo. Mientras que, una acción de implicación que involucra anticipaciones es o verdadera o falsa y por consiguiente ya constituye una lógica, aunque en los más primitivos niveles. Además, debido a que los significados que siguen a la asimilación de objetos para los esquemas del sujeto, y recíprocamente, todas las asimilaciones que engendran significados, una sucesión causal de eventos observables es una condición suficiente para implicaciones entre significados. Por ejemplo, un objeto x debe ser impuesto sobre un soporte, el cual el sujeto podría usar para retrocederlo, o más, podría ser colocado a continuación del soporte. Observando cualquiera de las dos situaciones muestran implicaciones entre significados, hasta tanto el sujeto comprenda que en el último caso es inútil para atraer el soporte: la relación ó acción “imponer” ha adquirido el significado de una “razón”.

Desde este punto de vista, varios niveles pueden ser distinguidos. El más elemental consiste en construir una acción, objeto y esquemas de relación en el medio de imágenes perceptuales globales que incluyen el mundo de los infantes recién nacidos. En este universo inicialmente no diferenciado, cualquier cambio meramente al principio de cantidades para sustituir un cuadro global por uno previo, sin un análisis detallado de posibles modificaciones. Comenzando por ésta situación esencialmente sincrética, los primeros esfuerzos cognitivos son equivalentes a tallar de relativamente aislables y estables elementos a través de acciones repetitivas (el origen de esquemas de acción). De este modo, objetos y relaciones están formados, sirviendo como contenido para inferencias ó implicaciones entre significados y acciones.

Hemos descrito previamente la ardua y más bien tardía (edades de 10-12 meses) conquista de la permanencia de un objeto bajo varias condiciones en las cuales el objeto es resguardado. (6) Desde entonces, muchos trabajos (por Bower (17) y otros) han mostrado que esta construcción es aún más compleja que en nuestra descripción. Recientes estudios (18) describen otros esquemas que están elaborados alrededor de 9-10 meses. Encarados con cubos vacíos de varios tamaños, con barras y pequeñas bolas de plasticina, algunos sujetos muestran la

intención de insertar un cubo más pequeño en uno más grande pero, muy interesantemente, en lugar de hacerlo directamente, ellos primero lo pusieron en su boca: Ellos construyeron el esquema del contenido del recipiente (en el presente caso, una relación), a través de una forma de “abstracción reflectiva” de la rutina y un esquema bien establecido de “poner algo dentro de su boca”. Ellos entonces lo extendieron a un nuevo, de algún modo esquemas intercoordinados ó sub-esquemas tales como insertar y sacar, para llenar o vaciar ó para repetir la acción de insertar de tal manera que un cubo, el cual es un “contenido”, se convierta en un “recipiente”para el cubo más pequeño. Las bolas, cubos y barras eventualmente serán todos usados como contenidos y los seis cubos como recipientes.

Como por las bolas de plasticina, los recién nacidos unirán dos ó más entre sí de manera que constituyan un todo contínuo, entonces separarlos para restablecerlos el estado discontínuo previo. Otros objetos, las barras por ejemplo, serán usadas golpear, tirar, jalar, etc. Estos hechos son interesantes en que ellos muestran la construcción de esquemas relacionales los cuales deben ser intercoordinados, especialmente cuando una acción positiva (como insertar, etc.) es seguida por la acción contraria (sacar, vaciar, etc.) Esto comprende el inicio de implicaciones entre acciones, tales como “la acción x implica la posibilidad de la acción contraria”. Varios procesos tales como diferenciación de acciones, individualización y localización de objetos, agrupación, clasificación de actividades elementales, correspondencias, etc. Pueden también ser observadas.

Nosotros podemos llamar a este nivel inicial un “protológico”, entendiendo por esto una fase preparatoria guiando a los instrumentos a una apropiada deducción. Esta fase está marcada por la formación y coordinación de los primeros esquemas de asimilación, y por consiguiente de las primeras implicaciones de significado (por ejemplo, cuando las relaciones son establecidas entre visión y agarre a través de una evaluación progresiva de distancias exactas).

Esta fase inicial es seguida por otra, firmemente caracterizada por implicaciones sensomotoras entre acciones, las que en este caso son suficientemente sistemáticas para engendrar estructuras estables. Por ejemplo, una vez la permanencia del objeto es elaborada con respecto a objetos, temporalmente ocultos por una pantalla, el sujeto descubrirá que ellos ocupan la última de sus posiciones sucesivas y no la primera. Esto implica que las posiciones y desplazamientos están coordinados, y por consiguiente que los “grupos de desplazamientos” [19] están siendo formados. Es innecesario decir que, tales estructuraciones requieren no solo la constitución de implicaciones positivas, pero también un adecuado uso de exclusiones o negaciones, en adición a las inversiones iniciales arriba mencionadas.

Cuando la función serniótica está siendo elaborada, las implicaciones de acción están acompañadas por expresiones verbales, guiando a implicaciones de significado entre planteamientos. Tales implicaciones están firmemente determinadas por significados y no pueden ser reducidas a extensiones, como ellas permanecen dependientes sobre alojamientos y existencias carentes de una tabla general de verdad.

A este nivel, nuestros estudios nos guían a un tercer resultado interesante: Observamos la formación de operaciones rudimentarias en contextos de acción, cada una de las cuales es isomórfica a cada una de las 16 operaciones binarias de lógica proposicional. Naturalmente, éstas operaciones precursoras están aisladas y relacionadas a significados específicos, más que estar dentro de todos organizados (tales como agrupamientos, etc.). Nosotros consideramos anteriormente tales

operaciones como características de sistemas que están elaborados alrededor de edades entre 11-12, y tenían dos razones para este pensamiento. Primero, este período marca el inicio del pensamiento hipotético-deductivo, la capacidad para inferir necesariamente consecuencias de hipótesis puras, sin depender de datos (como al nivel de "operaciones concretas", alrededor de los 7-10 años). La segunda razón para suponer un tardío desarrollo es que al nivel hipotético-deductivo, éstas 16 operaciones surgen como un sistema de relaciones entre inversos (N) y reciprocidades (R) constituyendo grupos quatemality (¿) (los grupos *INRC* en los cuales C es el inverso de R y el correlativo de identidad 1). (20) Estos grupos son usados para resolver problemas de física, tales como aquellos que involucran las 16 operaciones al nivel de las coordinaciones entre acciones, muy anteriormente pensamiento deductivo y *afortiori* mucho antes estructuras *INRC* son usadas.

Lo que observamos actualmente a niveles tempranos son los 16 caminos de combinar pares de acciones, sin interrelaciones sistemáticas, en las cuales cada combinación es ejecutada de acuerdo al contexto. Más aún, como los conectivos lógicos "y/o" tienen varios significados intencionales que deseamos distinguir, los 16 tipos de combinaciones involucran mucho más que 16 operaciones, de acuerdo a como los sujetos elaboran varias formas de conjunciones, disyunciones, incompatibilidades, u otras combinaciones en situaciones particulares sobre la base de implicaciones de significado. Sea que implícita ó explícita, éstas implicaciones pueden ser reducidas teóricamente (por ejemplo, desde el punto de vista del observador) para combinaciones de implicaciones y negaciones: por ejemplo, p O q (donde la conjunción intencional **[incluir fórmula aquí]**. Estas cantidades para acertar que a todos los niveles, el fundamento de toda lógica es de una naturaleza inferencial, la cual es natural en el caso de una lógica de significados.

En una palabra, el propósito de este libro es revelar la construcción de tal lógica; esto constituye una natural y necesaria extensión de nuestra lógica operatoria que estuvo hasta ahora muy cercanamente (aunque solo parcialmente) ligada a la más familiar lógica extensional. El lector puede sentir que este objetivo actualmente involucra dos proyectos específicos que son tan diferentes que ellos habrían buscados en dos partes separadas del libro para evitar posibles confusiones. La primera sería para describir la formación y multiplicación de significados, recalcando ambas su diversidad y sus y sus características compartidas, y por tanto, examinar "el significado de significados" (ver el bien conocido libro de Ogden y Richard: *The meaning of Meanings"*). (21) La segunda sería un cerrado análisis de implicaciones de significados, especialmente aquellos consistentes de implicaciones entre acciones u operaciones (y las que, si no estamos equivocados, difícilmente alguien más ha discutido).

Las dos tentativas son distintas y podemos dar la impresión de mezclarlas innecesariamente. Sin embargo, a pesar de sus diferencias, no pueden ser desasociadas por una razón esencial que debemos recalcar desde el comienzo: Su unidad descansa no solo en algunos objetivos compartidos (relacionados, por ejemplo, a través de una inclusión o intersección), pero en el hecho mucho más importante e instructivo de que ellos son actualmente dos términos en una relación dialéctica y por consiguiente dos polos en un ciclo que prevalece desde el comienzo y crece como una espiral a través del desarrollo.

Como fue mencionado arriba, cualquier comprobación está siempre ligada a una interpretación la que necesariamente involucra no solo significados, sino también enlaces entre éstos significados ó a previos significados. Tales inferencias, sean explícitas ó implícitas, de sus más tempranas formas pueden solo consistir en

implicaciones entre significados y consecuentemente entre esquemas de acción. De aquí que, el esquema más elemental, el realizado reflejo de mamar, ya involucra implicaciones (entre desplazamientos y éxitos o fallas, por ejemplo, cuando un recién nacido debe cambiar su posición a manera de ajustar su boca mal posicionada al pezón).Y por una conducta enteramente adquirida, veremos en el capítulo 1 como significados e implicaciones son elaborados simultáneamente a través del uso de herramientas.

---

[16] Piaget J. *The Origins of Intelligence in Children.* New York: Norton, 1963.
[17] Bower T. G. R. *Development in Infancy.* San Francisco: Freeman, 1974.
[18] Sinclair, Stambak M., Lezine I., Rayna S., & Verba M. *Les bébés et les coses.* Paris: Presses Universitaires de France, 1982.
[19] Piaget J. Op. cit., pp. 241 - 247
[20] Piaget J. Essai de logique opératoire (JB. Grize, ed.). (Second edition of the Traité de logique, 1949. Paris: Dunod, 1971. [The statements in parentheses can be read C = NR & C = CI. (P.M.D.)]
[21] Ogden C., & Richards I. A. *The Meaning of Meaning*, 4th ed. London: Routledge, 1936.

1
SIGNIFICADOS E IMPLICACIONES EN LA CONDUCTA INSTRUMENTAL

Con D. de Caprona y A. Ritter

Este estudio analiza la formación de significados e implicaciones de acción en el comportamiento que ha sido muy a menudo y muy bien estudiado desde el trabajo de W. Köhler en chimpancés: el uso de varios objetos como “instrumentos” para alcanzar lo que la mano no puede. Tomamos este problema clásico porque este comportamiento ha sido raramente analizado desde el punto de vista de su lógica interna, una lógica que asegura la transición de una lógica sensomotora a aquella de anticipaciones y representaciones preparatorias.

El aparato [Figura 1] consiste de una mesa ancha al final de la cual tres objetos están mostrados en una fila: (1) A la izquierda está un mono relleno dentro de una caja fija y transparente; la caja está cerrada en todos sus caras pero abierta en la cara superior, de modo que uno pueda levantar al mono enganchando su cola; (2) A la derecha está un perro dentro de una caja similar abierta en una de sus caras y la cara superior; uno puede empujar al animal a través de la cara abierta en la parte trasera de la caja, hacerlo ir alrededor de la caja y jalarlo hacia sí; (3) No hay caja entre las dos, pero el gato, excepto un gato, el cual puede simplemente ser jalado. Las siguientes herramientas están disponibles libremente: (1) Una barra de 35 cms. De largo; (2) Otra barra de 40 cms. de largo , con un gancho en un extremo con el cual se puede levantar al mono o empujar al perro; (3) Un rastrillo de 35 cms. de largo; (4) Una barra de 35 cms. de largo, doblada en ángulo recto en un extremo, la cual puede ser usada para empujar al perro o jalar al perro y al gato. Sujetos adultos son presentados con secciones conectoras rectas, de 15 cms. de longitud, las cuales deben ser utilizadas para modificar las herramientas (1) a (4).

Insertar aquí la Figura 1

Figura 1

Tres niveles deben ser distinguidos en las reacciones observadas. El primer nivel está caracterizado por mera exploración, inclinado a atribuir significados a los cuatro mediadores potenciales, pero limitado a manipulaciones inmediatas como golpear, empujar, etc. Los sujetos no conciben a estos mediadores como herramientas para recuperar los objetos deseados, y por consiguiente no los utilizan como instrumentos. Este nivel no instrumental es seguido por un nivel intermedio (nivel II) en el cual aparecen primero los significados instrumentales, aunque permanecen esporádicos y mezclados con los comportamientos del nivel I. Finalmente, al nivel III, comportamientos instrumentales son adquiridos ya sea a través sucesos inmediatos o a través de esfuerzos más o menos laboriosos.

1. Nivel I

Primero que nada, aquí hay algunos ejemplos del *nivel I:*

SOA (1;2). A pesar de una instrucción de “ir a conseguir” los animales con las herramientas, SOA no muestra interés en las herramientas y solo hace apuestas sin éxito a agarrar a través de la sesión. Cuando el rastrillo es colocado enfrente del gato, el junta las barras y las empuja hacia el gato, haciéndolo caer de la mesa. Ella hace de igual manera con la caja del perro, el cual no se mueve. El gato es retornado a su posición inicial y una vez más el lo empuja gradualmente hasta que cae. Ella mira al gato, entonces en su mano, mientras mueve sus dedos (de este modo mostrando su deseo de agarrar al gato); entonces ella se acerca al gato, pero sin tratar de hacer contacto con la barra la cual ella ha colocado justo al lado de su brazo alargado.

XAN (1;8) trata de acercarse al gato para agarrarlo. Aún mirando al gato, el pone el rastrillo encima de la mesa y lo golpea sin ninguna acción de empujar. Este comportamiento es repetido varias veces durante la sesión ya sea solo con el rastrillo, o con todas las herramientas juntamente sostenidas. Entonces el toma el rastrillo por sus dientes, lo voltea, cambia de mano, golpea la mesa otra vez, desliza el gancho adelante y atrás, recoge la barra con el extremo doblado en ángulo recto, mira hacia el dobles, lo coloca sobre la mesa, y así sucesivamente. El experimentador jala al gato adentro con el rastrillo y entonces lo pone de vuelta donde estaba; XAN imita este comportamiento pero no lo usa en adelante. Cuando la demostración es repetida con la barra, el recoge el rastrillo y, en lugar de dirigirlo al gato, lo usa para golpear repetidamente la mesa. El toma la barra doblada en ángulo recto en su extremo, la sostiene por el dobles, inserta el otro extremo en una de las cajas y la empuja en lugar de tratar de jalar. El inserta el extremo del rastrillo en la caja del perro y entonces golpea la mesa, primero con el rastrillo y luego con la barra doblada. El también repite éstos comportamientos con varias herramientas sostenidas juntas.

BEL (1;4). A pesar de las instrucciones, *Bel* inicialmente explora las herramientas sin relacionarlas con los animales. Toma el rastrillo y el gancho y los mueve varias veces, rueda la barra sobre la mesa o la sostiene, todo el tiempo observando a los animales. Muestra como jalar al gato con la barra, el niño toma el gancho pero empuja al gato en vez de jalarlo hacia el. El experimentador jala al gato con el rastrillo, pero *Bel* imita ésta acción solo en la medida en que el jala el rastrillo, sin hacer contacto con el animal o aún mirarlo. El experimentador ejecuta la acción otra vez: el niño toca al gato con el rastrillo, pero lo empuja lejos hasta que cae de la meza. Cuando el gato es retornado a su posición inicial, el niño continúa sus esfuerzos con movimientos laterales, sin intención golpeando la caja del mono. Como para el perro, él se limita a sí mismo golpeándolo a el y a la caja. Entonces él también golpea a la mesa y al gato. Finalmente, el trata sin resultado de colgar al mono, el que representa una primera relación instrumental, aunque una abortiva. Cuando se realizó nuevamente el ensayo dos meses más tarde, *Bell* alcanzó el nivel II (ver abajo).

PAO (1;9) es interesante porque ella conecta las herramientas y los animales pero sin usar el anterior para jalar al último. Primero él toma la barra, la mira y la deja caer. Dándole el rastrillo, ella la mira, la voltea, la pone sobre la mesa, la empuja pero para un rato de tocar al gato. El gato es colocado a medio camino: Ahora ella toca al gato, pero entonces retrocede para un agarre directo en lugar de utilizar la herramienta. Una vez más el gato es colocado a medio camino: Aunque ella puso el rastrillo sobre la espalda del animal, ella finalmente lo agarró con su mano. El experimentador demuestra que jalando al gato con el rastrillo y entonces le tiende el rastrillo al niño. Después de tenerlo sostenido para investigar su forma, ella lo balancea verticalmente sobre sus dientes.

Estas reacciones iniciales son interesantes en varios aspectos. Primero que nada, ellos son claramente no del todo instrumentales como fue requerido por la instrucción para ir a buscar animales que están muy distantes para ser agarrados. En otras palabras, los cuatro intermediarios potenciales no tienen aún el significado de medios útiles para alcanzar la meta especificada. Aún cuando, como con *Bel*, el experimentador demuestra que jalando al gato con el rastrillo de modo que el niño pueda imitar lo que él ha visto, él tiene tan pobre comprensión de la relación “jalando con un instrumento” que él no hace un subsecuente uso de el y usa el rastrillo solo para golpear la mesa. Ni tampoco es como podría pensarse, que el sujeto olvida o ignora las instrucciones. Por ejemplo, *Soa* mira al gato y a su mano mientras trabaja sus dedos, entonces mueve su mano hacia el gato pero pone la barra paralela a su brazo sin tratar de hacer contacto. Así, estos niños ambos comprenden qué deberían hacer y fallan en entender las relaciones que los capacitaría a hacerlo.

La significación del comportamiento observado es igualmente fascinante. La fase inicial de explorar las cuatro herramientas debe ser concebida como una búsqueda de sus significados, en términos de “qué debe hacerse” con ellas. Estos significados son de dos formas: algunos se relacionan con las propiedades generales de las herramientas, considerando que las más ocasionales se sostienen sobre posibles relaciones establecidas con los animales. Incluídas en significados del primer tipo están que la barra pueden ser botada, rodada *(Bel)*, o sostenida verticalmente sobre la mesa; que el rastrillo puede ser agarrado por el mango o por los dientes, o hacerlo permanecer verticalmente; que es posible mover o deslizar las herramientas, pero imposible deformarlas; y que ellas son iguales en longitud

aunque diferentes en sus extremos. Mientras que estos significados generales son ordinarios y son mencionados y grabados de una sola vez por sujetos más viejos, lo que encontramos interesante sobre el primer nivel es que sujetos jóvenes necesitan exploraciones activas antes que ellos lo traten con atención. Esto muestra que los significados son las atribuciones de acciones (por ejemplo, asimilación de esquemas) para objetos; de aquí que las propiedades de los objetos no son reductibles a "puras" observaciones, donde "pura" significa sin ninguna forma de interpretación.

Como para los significados que se relacionan con la situación inmediata – en este caso animales que deben ser alcanzados – estos son ya numerosos aunque ninguno de ellos involucra la idea de "jalar por sí mismo". El más simple de todos es mover al intermediario hacia el objetivo, como *SOA* deposita la barra paralela a su brazo extendido, lo que muestra una intención de traer al objeto más cerca. Otro comportamiento que es tan frecuente como este pero cuyo significado es menos claro, es golpear la mesa. Esto podría parecer que involucra un significado del primer tipo, pero es más probable que indique una intención de agitar los animales, y por consiguiente desalojarlos con la esperanza de que ellos los tendrán más cerca *(Bel)*, por ejemplo, alternativamente golpear la mesa y al gato). Cuando una animal es tocado por una herramienta, las dos maniobras más prevalecientes son las de empujar el objeto o moverlo lateralmente, en lugar de jalarlo. Esto es justamente como si el instrumento fuera una continuación del brazo del sujeto – como de seguro, de el brazo y no de ambos el brazo y la mano como agarrando.

De acuerdo a nuestra guía de hipótesis, todos éstos generales y locales significados consisten de atribuciones de acciones para objetos, que sobre las implicaciones entre significados o acciones? Ellas están tan implícitas que uno puede estar tentado a pensar que ellas aún no existen. Pero dudamos de esto porque atribuir significados a objetos o acciones es interpretarlos, y la interpretación es compleja, fundamentalmente comportamiento inferencial , sin embargo trivial sus implicaciones pueden ser: Alcanzar un objeto implica acercarse a el, y empujarlo implica continuar este "ir hacia" el movimiento; mientras que jalarlo implicaría un movimiento en la dirección opuesta, por lo tanto su gran dificultad. Arrastrar lateralmente implica un cambio de la dirección "hacia sí" a su perpendicular; golpear la mesa implica que un resultado positivo es posible; etcétera. Brevemente, cada acción toma su lugar entre un set de condiciones preliminares y un set de ciertos o posibles resultados. Esto cuenta para la presencia, a este primer nivel, de implicaciones proactivas y retroactivas (Peirce's "predictive" and "retrodictive" implications).

2. Casos intermedios entre "empujar" y "jalar"

Al nivel I, uno a veces ve ejemplos de movimientos de arrastre lateral, pero ellos no están intentados o entendidos por el sujeto como una posible transición de un movimiento de jalar. Los siguientes ejemplos muestran como los sujetos usan movimientos laterales para alcanzar la solución.

BEL (1;6) (Reensayado dos meses después de sus reacciones al nivel I). Como en la primera sesión, *Bel* empezó por golpear la mesa, empujando el objetivo y así sucesivamente. Sin embargo, después de haber colocado los dientes del

rastrillo detrás del gato, el concibió la idea de mover al animal hacia su otra mano. El puso el rastrillo en la espalda del gato, empujándolo hacia los lados y tuvo éxito en tomarlo con su mano libre. En el siguiente intento, el intenta mover al gato de su mano derecha hacia la mano izquierda, pero el no tuvo éxito en hacerlo. Una vez más, el puso los dientes sobre la espalda del gato, presionó fuerte y le dio vuelta, pero el estaba imposibilitado de colocar el rastrillo detrás del gato y el simplemente lo empujó. El entonces le pega repetidamente, lo cual lo trae un poco más cerca. Después de tocar una de las cajas, el empuja toda la mesa y concibe la idea de empujarla, posibilitándolo para agarrar al animal. Entonces usando el gancho el una vez más trae más cerca al animal a su mano libre. Volteando hacia el mono, inserta el gancho en la caja pero falla en enganchar al mono. Como con el perro, el se restringe a sí mismo golpeando la caja.

CRI (2;2) comienza moviendo lateralmente al gato con el gancho, entonces lo mueve con el rastrillo y lo coge con la otra mano. En contraste, el jala al gato directo atrás cuando el experimentador coloca el rastrillo detrás de el. El también tiene éxito en sacar al perro de la caja, pero solo para agarrarlo manualmente.

JOE (2; 10) Coloca una herramienta detrás del gato, lo jala un poco hacia él, en tal caso lateralmente, hasta que el puede tomarlo con la otra mano. Pero el tiene éxito en sacar al mono de la caja con el gancho y lo jala hacia atrás. Después exitosamente recupera al gato. El perro, sin embargo, una vez sacado de su caja, es solo jalado unos pocos centímetros hasta que puede ser asido con la mano.

CAP (2;10) Cuando se le preguntó. “Podria usted jalar al gato con el rastrillo?”, ella respondió, *No.* Ella trata sin embargo y tiene éxito en dos movimientos. Este éxito la guía a pensar que podría lograr el mismo resultado con los otros animales y el rastrillo. El perro es colocado en el medio del tablero, fuera de su caja. Ella primero toma la barra pero dice, *Esto es para más tarde.* En su lugar selecciona la barra doblada: Esta, sí, y recupera al perro. Omite al mono y , así como al perro cuando está de regreso en la caja, fallando en diferenciar los movimientos requeridos dentro de las cajas.

Desde el punto de vista de implicaciones entre acciones, estos casos transicionales son instructivos. En adición a pegar y jalar, los sujetos del nivel I algunas veces ejecuta movimientos de barrido laterales, sin ninguna intención de acercar al objeto. Los presentes comportamientos, en contraste, efectúan desplazamientos oblicuos de la mano que sostiene la herramienta a la libre y a la espera. Por consiguiente, lo que tenemos aquí es una forma de síntesis entre maniobras instrumentales y agarre manual. Sobre todo, lo que está involucrado es una inferencia que cuenta, para decir que si ciertas trayectorias han sido cumplidas, otras deben también ser posibles. Esto conduce a un número de sujetos a proceder de empujar a movimientos laterales u oblicuos, y eventualmente poner dentro el objeto. Más aún, debemos notar en *CAP* una tendencia hacia la generalización: ella intenta tratar con los animales con diferentes herramientas (la barra es “para más tarde”), aunque ella falla, excepto cuando jala al gato con el rastrillo después de negar que fue posible.

3. Niveles ii y iii

Incluiremos en el nivel II a sujetos quienes tuvieron éxito en regresar al gato pero fallaron con el mono y, sobre todo, con el perro. Puesto que éstos dos están colocados en cajas, diferencias y coordinaciones de acciones son requeridas. He aquí algunos ejemplos:

ANO (3;4) jala al gato enseguida con el rastrillo el cual el ha extendido y dejado caer sobre el animal. Como para el perro, el descansa el gancho sobre el borde superior de la caja y lo empuja hacia ella a través de la abertura pero eventualmente se da por vencido. Pone el rastrillo sobre un borde, lo inserta en la caja, empujando y jalando todo el aparato mientras trata de sacar al animal. Se dio por vencido. *ANO* entonces colocó el gancho detrás del mono y tocó el extremo de la cola sin poner atención a su curvatura. Sin embargo, parcialmente por casualidad, tiene éxito en sacarlo pero no lo atrajo hacia sí antes de sujetarlo con su mano *ROL* (3;6) coloca el rastrillo encima y luego detrás del gato y lo jala. Como para el perro, el no lo saca de la caja pero empuja la caja, le da vuelta al perro, y así sucesivamente, concluye. *El perro no quiere venir.* El hace otro intento con la barra doblada y dice: *No puedo hacerlo.* El intenta con las otras herramientas, de nuevo voltea al perro, pero sin éxito. El saca de la caja al mono con el gancho, lo cual hizo para dejarlo caer entre la curvatura de la cola (por lo tanto un cambio localizado al nivel III).

MAN (3;5) le da un codazo al perro y lo voltea cinco veces, pero nunca logra sacarlo

Aquí hay ejemplos del nivel III:

JES (2;1: precoz). *Jes* no tiene problema en jalar al gato, y se vuelve hacia el mono con el rastrillo. Lo coloca debajo del animal, levantándolo un poco, usando el mango como una palanca contra el borde de la caja. El lo hace cinco veces hasta que el mono cae fuera de la caja. El animal es devuelto a la caja y *Jes* es requerido para encontrar otro procedimiento. El utiliza el gancho exitosamente, insertándolo en la curvatura de la cola. Más adelante, el utiliza el gancho para empujar al perro a través de la abertura lateral de las caja (opuesta al sujeto) y traerlo de vuelta hacia el.

CAR (3;4). Con el perro, el comienza por palanquearlo con el rastrillo a lo largo de un lado de la caja, y dice: *Nosotros podemos hacerlo de este modo.* Cuando el nota que es más simple empujarlo a través de la abertura trasera de la caja, el empuja al animal hacia atrás, lo cambia hacia la izquierda en dos movimientos y lo trae hacia sí. El lo hace similar con la barra doblada. Entonces el se divierte extendiendo las herramientas con las secciones apropiadas.

ROS (3;6) inmediatamente engancha la cola del mono y lo jala hacia ella. Selecciona el rastrillo para el perro. Lo empuja hacia atrás diciendo, *No hay puerta aquí*, y entonces intenta jalar al animal hacia delante.

DAN (4;6) Con los dientes del rastrillo ella mira al mono a través de su cola y lo saca. Para el perro, ella primero toma el gancho y maniobra para girar al animal. Entonces toma la barra doblada, empuja al perro fuera de la caja y lo jala hacia sí.

ANA (4;6) muestra las mismas reacciones: Ella inmediatamente empuja al perro, fuera detrás de la caja, luego a la izquierda y lo jala adentro. El mono es muy cuidadosamente levantado, con algunas breves pausas.

Solo en el nivel III están los tres esquemas siguientes coordinados: empujar al perro para hacerlo ir detrás de la caja; moverlo lateralmente alrededor de la caja; y jalarlo hacia sí. Podemos entonces asumir que las anticipaciones y un plan de acción están involucradas, de las cuales aún se carecen en el nivel II – donde aunque las metas son suficiente claras, los recursos permanecen dependientes sobre comportamientos de prueba-y-error con éxitos o fallas parciales que no son siempre comprendidas.

En lo que a significados concierne, notamos progresos hacia nuevos significados para objetos o herramientas. Estos no son por mucho tiempo rígidos, elongados, sin características sólidas de objetos manuales para jalar cualquier cosa que la mano no puede alcanzar. En el nivel III, cada parte de los instrumentos tiene un significado especial: El significado de la curva en el gancho es enganchar; el extremo simple de la barra doblada tiene un significado de empujar o jalar, así como el extremo del rastrillo, aunque el último es más ancho. La barra es el único instrumento que no tiene un significado funcional especializado.

El presente estudio levanta un problema básico, sobre implicaciones entre acciones que están caracterizadas por su significado funcional, y uno que podremos encontrar de nuevo en otros estudios: como explicar la distinción entre relaciones casuales e inferencias implicativas. Por cierto que, en cada etapa de secuencia de acciones obviamente presentan un aspecto causal (y más aún un teleonómico **?**): Jalar al perro hacia sí después de sacarlo de la caja es un resultado causal (uno de varios posibles) porque las acciones están encadenadas, condicionadas y determinadas sucesivamente, más que ser una serie de observables a la manera de regulares sucesiones de Hume. Por consiguiente, empezando con las formas sensomotoras **?** elementales estudiadas en este capítulo, necesitamos justificar nuestro constante discurso de implicaciones entre significados de acciones.

En primer lugar, debemos argüir que los sujetos, dependiendo del nivel que han alcanzado, pueden abstenerse de acciones abiertas y confinarse a anticipar todo lo que ellos actualmente pueden hacer, incluyendo los errores que deben ser evitados. Anticipar es deducir, y cualquier deducción ó inferencia es una serie ó sistema de implicaciones.

Un segundo argumento es que tales anticipaciones inferenciales no gobiernan sobre las condiciones materiales de la acciones (que es, sobre los movimientos detallados de los músculos del brazo o la mano actuantes), pero sobre significados atribuídos a los esquemas cognitivos del sujeto. Estas atribuciones ocurren en cualquier interpretación de objetos y las actividades realizadas sobre ellas.

Tercero, los planes que los sujetos fijan para ellos mismos están acompañadas del resultado por justificaciones que éxitos o fallas corroborarán o invalidarán más adelante. Estas justificaciones son diferentes de, pero preparatorias para, valores verdaderos.

Finalmente, la coordinación de estos tres esquemas “sacar”, “mover lateralmente” y “jalar hacia sí”, las cuales caracterizan al nivel III (en la situación del perro, donde la caja es abierta por la parte de atrás) es una anticipación deductiva de un tipo más alto, involucrando la construcción de un esquema completo fuera de esquemas parciales que son coordinados por el todo. Como una implicación entre implicaciones, es innegable que este esquema de coordinación es inferencial en su naturaleza. Aunque puede ser representacional, sobrepasando el puramente nivel sensomotor **?** , sus constituyentes deben haber sido previamente preparados y esto vincula la existencia de implicaciones más simples ó más elementales.

Por consiguiente, estas reflexiones parecen permitirnos usar la noción de implicaciones entre acciones, como distintivo de su causa. Innecesario decir, que la casualidad está igualmente involucrada y, aunque diferente, estos dos aspectos de comportamiento instrumental son inseparables. Podemos aún ir más allá y aseverar que los sistemas inferenciales involucrados aquí constituyen “modelos” y que el pensamiento causal consiste precisamente en la atribución de éstos modelos a objetos y sus acciones fuera del sujeto. De otro modo, causalidad seria reducida a la sucesión regular de observables con la cual los empíricos se contentan.

2
DESPLAZAMIENTOS EN UNA ESTRUCTURA DE ÁRBOL

Con C. Monnier y C, Vachta

En el capitulo previo, los niños tuvieron que crear senderos para los objetos a seguir. En la presente situación, los senderos son ramales de caminos en la forma de un árbol y los niños solo tienen que escoger entre ellos. Tales escogencias requieren inclusiones y exclusiones y, como un árbol es isomorfo a un “agrupamiento” de clases, las implicaciones iniciales de acción (sea que sean erróneas y tengan que ser corregidas o sean correctas la primera vez) se conviertan gradualmente en más intercoordinadas de un nivel de desarrollo al siguiente, hasta que finalicen como verdaderas operaciones de inclusión y exclusión formando parte de una clasificación de agrupamiento. [22] Esta es la significancia de tales implicaciones desde el punto de vista de elaborar una lógica de significados.

El aparato es una red de túneles (de dimensiones: 110 x 50 cms.; altura: 5 cms.; vea la Figura 2). El “árbol” está colocado delante del niño con el tronco a la izquierda y las ramas extendiéndose hacia la derecha, en orden de evitar artefactos que podrían surgir de sugerir “una cúspide” y “una base” del árbol. El tronco del camino *T* se divide en dos ramas primarias *A*1 y *A*2. Cada una de éstas a su vez se ramifica en dos senderos *B*1 y *B*2 para *A*1, y *B*3 Y *B*4 para *A*2. De cada una de estos cuatro *B*s dos senderos adicionales se separan: *C*1 y *C*2 para *B*1; *C*3 y *C*4 para *B*2; *C*5 y *C*6 para *B*3; y *C*7 y *C*8 para *B*4. Cada uno de estos senderos finales termina en uno de ocho garages *G.* El tronco *T* y todas las ramificaciones son túneles huecos, de modo que un pequeño carro entrando a *T* necesariamente termina en uno de los ocho *G*s. La tarea es determinar en que garage está el carro. Para este propósito, el carro es fijado a un largo y delgado listón, el cual descansa entre *T* y *G* después que el carro ha arrivado. Además, cada sendero *A* y *B* es proveído con dos pequeñas ventanas redondas que el niño debe abrir (y debe entonces cerrar) paras chequear si el listón está en la rama. El carro no puede virar de vuelta ni retroceder.

INSERTAR AQUÍ LA FIGURA NÚMERO 2

Uno puede ver cuántas inferencias y operaciones este set experimental permite: Si el listón está en *A*1, esto implica que el carro está localizado entre *G*1 y *G*4, mientras que *G*S a través de *G*8 está excluído; si el listón está en *A*2, el carro debe haberse ido a través de *B*3 ó *B*4; etcétera. Debido a que el agrupamiento de clasificación puede tomar la forma de un árbol isomorfo para la presente situación, cambiamos aquí del estudio de implicaciones sensomotoras **?** a un análisis de implicaciones entre operaciones de un agrupamiento. Asumimos que éstas operaciones están basadas en significados y están acompañadas por expresiones verbales de una naturaleza no-extensional. Estamos en posibilidad de distinguir 4 niveles: IA, IB, II y III.

1. Nivel IA

Aquí hay ejemplos del nivel IA (alrededor de 4 a 5 años):

SAB (4;7) Empieza con abrir todos los Gs hasta que encuentra el correcto y, a pedido, muestra la ruta que lo ha guiado ahí. "Abre solo las ventanas que son útiles para encontrar la salida" (Ella abre la ventana *A*1). [23] "Sí – Qué significa eso?" *Que el listón está sujeto al carro,* "A dónde llegará el carro?" *Aquí (G*1*)*. No (el carro está en *G*2). "En otro?" *No.* "Solo trate". (*G*2: correcto). "Es mejor comenzar por abrir las ventanas en *A, B ó C?"* Entre a *C.* "Es útil abrir cualquiera antes de eso?" *No.* "Entre a B" (por ejemplo ? *No, eso es inútil.* "Que tal abrir *C?" Sí*, "Por qué?" (No responde).

El carro es colocado dentro de *G*5. "Trate de encontrarlo con unas pocas ventanas solamente". (Ella abre *A*(1,1)). *No.* (Ella abre *A*(2,1)). Sí. Ella entonces abre *A*(2,2), la que es inútil porque está en el mismo segmento, y entonces hace lo mismo con *B*(4,1) y *B*(4,2): *No.* Ella no obstante abre *G*7 y *G*8, lo cual es inconsistente con el hecho de que *B*4 está vacío. Entonces ella abre *B*(3,1): *Sí.* Pero entonces abre *B*(3,2) (inútil). "En cuál garage está el carro?" Ella muestra *G*4, *G*3**,** *G*2 y entonces *G*1, cuya rama fuera de *A*1 Y están por lo tanto inconsistentes con *A*2. Entonces ella apunta a *G*5 por casualidad correcto pero también porque viene después de *G*1 y *G*4, los cuales están incorrectos. "Y cuando no hay listón?" *Eso no significa nada.* "Si el listón está en *B*1, dónde estará el carro?" (Ella muestra *G*1-*G*5, mientras que solo *G*1-*G*2 son correctos). Por consiguiente, aunque es fácil para *Sap* retroceder de *G*s a *T*, ella no puede hacer inclusión cuando va de *A* a *G.* "Es útil abrir las ventanas en *A*? "*No.* "Y en *B*?" *No, es inútil.*

XIS (4;11). "Es *A* útil?" *No, aquí* (C). Y qué de (*B)? No.*

ERI (5;8) El abre los *G*s al azar: Sería más fácil si abriéramos una de las *A*s primero?" *No, porque el carro no va hacia ahí.* "Funcionaría si abriéramos *A* ó *B? "Podríamos abrir las otras, pero es mejor con las C*s porque están mas cerca de los garages.

DAV (5;0) comienza con *C* y abre siete *G*s antes de encontrar el correcto (*G*1). Cuando se le pregunta, él señala la ruta seguida por el carro. Sin embargo cuando el carro es colocado en *G*6, él señala sucesivos *C*s. "Es que al final ahí(*A*s) es útil? *"No.* Muéstreme más adelante dónde el carro ha entrado" (El abre *B*4, considerando que el arrivo en *G*6 implica a *B*3). "Ha entrado ahí?" Sí, aquí(él muestra *A*2 y *B*4 [*G*8] y es sorprendido por el resultado, el cual corrige abriendo inmediatamente *A*2, *B*3 y *G*6). "Trate de no abrir muchas puertas: Es bueno abrir una en *A*?" Sí (él abre A(1,1) y *A*(1,2): inútil; y continúa con *B*1). "Dónde puede finalizar el carro?" Ahí(*G*1-*G*4, aunque *G*3 y *G*4 están excluidas). "Podría el carro llegar ahí (*G*5-*G*8)?". *No, porque el listón no está en A*2. Para *G*8, sin embargo, él continúa focalizado solo en los *C*s.

Si los elementos *C, B* y *A* fueran objetos que pudieran ser alojados a través de inclusiones, el problema podría ser claramente más fácil de resolver. Sin embargo, aunque el agrupamiento involucrado aquí es isomorfo para una clasificación, en ésta versión infralógica o espacial (donde los *C*s emanan de una subdivisión de los *B*s, similarmente de los *A*s), las posiciones finales resultan de los senderos tomados. Esto complica las cosas para los sujetos, quienes están centrados en las posiciones finales sin deducir los senderos de los carros desde el punto de inicio; consecuentemente, aún cuando los senderos están entendidos ellos están exentos de necesidad. Por tanto, la pasividad de implicaciones, las cuales solo muestran el trazo fácil de el sendero seguido, una vez que su punto final *G* es conocido, y no se apoyan en predecir el sendero de *T* a *G.* Por consiguiente, tal implicación no está basada en simples implicaciones de la forma $A \rightarrow B$ (ó $A1 \rightarrow B1$), pero en una anticipación en la cual el término antecedente *A*1 vincula una dicotomía *B*1 ó *B*2 cuyos términos son recíprocamente exclusivos (notación w): $A1 \rightarrow (B1 \text{ w } B2)$, etcétera. De aquí que lo que nosotros encontramos aquí es un "agrupamiento" de la forma normal. $A + A' = B$, $B + B' = C$, …, pero los cuales deben ser leídos y aún construídos en orden inverso – $B \rightarrow (A \text{ w } A')$, $C \rightarrow (B \text{ w } B')$ – en lugar del orden directo *A, B, C,* como en el caso cuando el sendero es deducido de su final. A resultas de esto, en la opinión de muchos sujetos, "es inútil" (*Sap, Xis y Dav)* para empezar de *T, A ó B* porque "el carro no va a ahí" (*Eri*). Por lo tanto, el primer nivel está caracterizado por una falta de inclusiones en la dirección de la construcción de senderos, en vez del caso con el cual los senderos pueden ser trazados.

2. Nivel IB

Entre el nivel I y las inclusiones sistemáticas comenzando en el nivel IIA, están un número de casos intermedios que despliegan una mezcla de implicaciones correctas de la forma $A1 \rightarrow (B1 \text{ v } B2)$ con inferencias que son aún inválidas. En otras palabras, existe una transición del método puramente empírico (el examen más o menos exhaustivo de los *G*s sin tomar los senderos en cuenta) a semi-empíricos y semi-deductivos procedimientos. Más brevemente, este nivel IB está caracterizado por inclusiones parciales.

HAD (5;6) comienza con los *C*s, pero en el segundo intento comienza con *B*1 y *B*3 y, como ellos están vacíos, él abre *A*2, donde el mira el listón. Salteando a

los *B*s, deduce que son *C*7 y *C*8 y encuentra el carro en *C*8. “Qué es útil para abrir *B*3?” El responde *no,* a la luz de su éxito en ir de *A*2 a *A*8 (los últimos son una línea recta en la parte inferior del aparato). Cuestionado a usar justo tres ventanas, él escoge solamente *B*2 y *B*3, que es, una *B* en cada rama primaria.

RAC (6;6) comienza con *B*2, entonces abre *B*1: *Ah, está aquí,* entonces abre *G*2 (correcto). En el segundo intento, comienza con *A*2, luego abre *B*4 y *G*8, que de nuevo es correcto. En el tercer intento, sin embargo, de no-*A*1 – ella la abre dos veces, como si la segunda ventana *A*(1,2) corrigiera la ausencia de listón en *A*(1,1) – ella directamente concluye con *C*4 y *C*5, los cuales son incompatibles. Contiguo a no-*A*1 ella directamente infiere a *B*2, el cual no se deriva de *A*2 pero pero precisamente de *A*1. “Qué significa esto, que el carro no está en *B*1?” *Ah! Ahora lo entiendo todo; estará en B*2 *porque primero está en A*1 *y, después, talvez, viró y entró (por ejemplo, hacia) B*2. Sin embargo, de *B*2 ella equivocadamente concluye en *G*8, el cual depende de *B*4; etcétera. “Es mejor abrir una ventana en *A?” No, en cualquier parte.* “Dónde es mejor?” En *A, B Y C.* Ella correctamente adopta ese orfen en el siguiente intento, pero entonces ella continúa (como en el nivel I*A)* enumerando los *C*s (al cual ella agrega un *B*). Así, *Rac* estratégicamente alterna deducciones correctas con periódicas recaídas dentro de falsas inferencias del nivel I*A.*

GAB (6;0) similarmente, junto con implicaciones precisas, *Gab* hace algo tan equivocado como éstas: *A*1 → *B*3 → {*C*4, *C*3, *C*2 y *C*1}.

DAN (6;0) empieza brillantemente con *A*2, *B*3, *C*6. *Lo encontré!* “Podría usted haber abierto muy pocas ventanas?” *No.* El empieza de nuevo, alcanza *B*3 y de nuevo muestra *C*6. “Podría haber estado en otro *G* (de hecho *G*5)?” *No.* “Está seguro?” *Sí* (él abre *G*5 y encuentra el carro). “Y con *A?” Algunas veces lo encontramos; algunas veces no.* “Es mejor empezar con *A* ó con *C?” Algunas veces es mejor comenzar en el centro.*

LAU (6:1). El lo hace correctamente pero con abundantes inferencias cuando él comienza con *A, B, C* y da la razón para la predicha llegada del carro en *G*5 ó *G*6. De otra manera, él calcula lo que piensa diciendo: *Si deseamos estar seguros dónde entró el carro, debemos empezar con B, porque con A el puede ir ya sea a la cima o a la base.* “Por consiguiente no es necesario abrir *A?” Con A no podemos decir más tarde en qué dirección el va; debemos empezar con B.* “Y qué con C?” *Sí, porque podemos ver de una vez. El juego está hecho de tal forma que es inútil empezar con A y B. Lau* completamente desdeña el “por qué” de las posiciones finales y de este modo desdeña la necesidad..

MIC (6;2) va aún más lejos; *Para encontrar el carro, las C*s ayudan bastante, *las B*s *ayudan un poco y las A*s *no del todo.* Esta es la verdadera negación de inclusiones.

JAN (6;6), que está cerca del nivel II*A*, empieza con *A*, luego con *B* y *C*, y compara *A*1 con *A*2 ó pares de *B*s, y así sucesivamente: *Porque usted siempre lo pone del otro lado; si el listón no está ahí, sabemos que está en el otro.* Todo esto no lo previene de eventualmente concluir que *para abrir la menor cantidad*

*de ventanas debemos comenzar con las C*s. El no ve que hay ocho ventanas en ese caso y solo tres cuando uno comienza con *A*.

De aquí que notamos que algunas de éstas reacciones evidencian inclusiones parciales, mientras que otras involucran falsas inferencias. Como resultado, todas las posiciones en *G* son finalmente descubiertas, pero como situaciones estáticas y no como resultados necesarios del sendero seguido.

---

[22] Por "agrupamiento" Piaget se refiere a la estructura del pensamiento concreto operacional, cuya descripción formal comparte algunas características (por ejemplo, operaciones inversas) de grupos algebraicos (de aquí la etiqueta de "agrupamiento") tanto como características (por ejemplo, inclusiones alojadas) de sets ordenados ó enrejados. Vea Piaget J., *Essai de Logique Operatoire,* Paris: Dunod, 1971; Wermus H., *"Formalisation de quelques structures initiales de la psychogenese", Archives de Psychologie,* 1973, 42, 271-288; Wittmann E., "Natural numbers and groupings", *Educational Studies in Mathematics,* 1975, 6, 53-75. (P.M.D.)
Inhelder B., & Piaget J., *The Early Growth of Logic in the Child,* New York: Harper and Row, 1964, describes many such forms of classification. (J.E,)
[23] Ventanas específicas están designadas para ordenar pares, tales como *A*(1,1) que significa la primera ventana del rama *A*1, etcétera. Las ventanas también están referidas a más simples por el nombre del ramal (por ejemplo, *A*1) cuando gran especificidad no es necesaria.

---

3. Niveles II y III

Es solamente alrededor de los 7 a 8 años (nivel II) que la red es considerada en su totalidad y comienza por constituir un agrupamiento operatorio. Sin embargo, sujetos a este nivel no tienen aún determinado el número mínimo necesario de ventanas que tienen que ser abiertas, ni la posibilidad de triunfar notando las posiciones donde no hay listón, el cual arranca del hecho de que el sistema es dicótomo en cada una de sus sub-divisiones. Unas pocas falsas inferencias permanecen pero ellas son pronto corregidas.

SEB (7;10). "Para encontrarlo tan pronto como sea posible, deberíamos iniciar en *A* ó en *C?" En A.* El ejecuta la secuencia correcta *A*2, *B*3, *C*5. "Podemos saber cuántas ventanas debemos abrir?" *No, depende.*

BRI (8; 6) correctamente escoge *A*2, *B*4, *C*7. "Puede usted encontrarlo abriendo pocas ventanas?" *Yo no sé.* Entonces abre *A*2 (vacía), *A*1, *B*2 (vacía), *B*1, *G*2 (vacía), *G*1 (correcta). "Si usted abre *A*1 y usted no ve el listón, es esto útil?" *Sí, esto significa que se ha ido al otro.*

DID (8;2) viró de *A*1 (vacío) a *B*3. "En qué *G podría estar?". En G*5. "Podría estar en otro?" *G*6. "En otro?" *No, porque se ha ido a través de B*3 *y porque no puede retornar.* "Con cuántas ventanas podremos encontrarlo?" Tres. "Con menos de éstas?" Talvez. "Son tres ventanas suficientes siempre?" Más, algunas veces. "Es posible encontrarlo sin ver el listón?" No es posible, porque si no hay listón en *A*1, entonces está en *A*2. Si el listón no está en B*3,* entonces está en *B*4, y si no en *C*8, entonces en el otro (*C*7). "Entonces es posible sin ver el listón?" *No,*

porque yo no puedo ver donde está; debemos ver el listón. "Podemos saberlo con anticipación?" *No.* "Si tres ventanas no son suficientes, cuántas más?" *Cinco.* "Muéstremelo otra vez" *Si no es B*1, entonces es *C*7. "Estaría usted seguro con 4 ó 5 ventanas?" *Sí.*

En un nivel ligeramente más avanzado, los sujetos aciertan que es necesario siempre empezar con *A* y esto abre tres ventanas que son suficientes para encontrar el carro.

YVA (8;11) abre *A*2, *B*4 (falla), luego *B*3, *G*6: *No.* Entonces está en *G*5 porque yo ví el listón en *A*2 *y no aquí* (*B*4, etc.); de tal manera que el carro no puede estar en *G*7 y *G*8. *Yo abrí una puerta muchas veces porque si el listón no estaba en B*4, *entró a B*3. "Es posible tener éxito con pocas ventanas?" *Sí, una menos.* "Incluso menos?" *No. Yo debo ver si está en A*1 ó *A*2.

SAD (8;3) Está en *G*3 porque se ha ido a través de *A*1 y *B*2 y no a través de *C*4. "Debemos comenzar con *A*?" *Sí, siempre, porque cuando abrimos A, ya sabemos en que lado está el listón.* "Y si no podemos ver el listón en ningún lado?" *Esa variedad de ayudas; si lo vemos, eso ayuda también.* "Podemos encontrarlo, si nunca lo vemos, empezando con *A*?" *No, imposible. Tenemos que verlo al menos una ó dos veces.*

Así, éstos sujetos han obtenido una cercanamente completa necesidad, la cual carece de la forma de necesidad que caracteriza al nivel III -- la posibilidad de especificar el sendero necesario para abrir solo ventanas vacías:

VER (9;9) ella empieza con reacciones del nivel II, lo cual es normal a su edad, pero ella siempre sigue el orden *A, B, C.* Sin embargo, después de ser cuestionada, "Podría el carro haber tomado otro sendero para llegar ahí?", ella solo tiene reacciones del nivel III: *No, el carro fue obligado.* "Con cuántas ventanas podemos saberlo?" *Con tres.* "Por qué?" *Porque este (A2) es un sendero, éstos dos (B*3 ó *B4) hacen otro sendero y este (una C) es otro.* Es compulsivo abrir tres de ellas?" Sí, tres es compulsivo. "Es el orden importante?" (Ella muestra las As.) *Estamos obligados a empezar con A.* "Ahora, qué pasa cuando no hay listón?" *Eso significa que el carro se ha ido a través de otro.*

CAT (10;3): *Si abrimos A*1 *y no vemos nada, el carro ha entrado a A*2. *Si abrimos B*3 *y no vemos nada, entonces el carro ha entrado a B*4*; y si no hay nada en G*7*, entonces ha entrado a G*8. *Tres ventanas son siempre suficientes.* "Ayuda si vemos algo?" *Sí.* "Y si no vemos nada?" *Sí.*

CRI (11;1) "Ayuda ver el listón?" *Sí.* "Y qué si no lo vemos?" *Sí*. *Eso significa que si no está en este lado está en el otro lado* "Y ayuda eso mucho?" *Sí.*

STE (11;8) Sobre no ver nada: *Si salteamos una abertura aquí* (en *B*), *eso no ayuda. Si lo hacemos en el orden correcto, eso ayuda.* "Es posible encontrar el garage sin siquiera ver el listón?" *Sí.* "No es eso extraño?" *No, uno debe (por ejemplo, uno solo necesita) ser lógico.* "Está usted muy seguro?" *Sí.*

DAC (12;11) establece que tres ventanas son necesarias, *porque hay tres segmentos.* Y, es siempre como una forma opuesta (por ejemplo, dicotomía). “Si no vemos el listón?” *Es como si hubiéramos dejado trazo libre.*

PHA (12;2) “Si nunca vemos el listón?” *Sí, podemos encontrarlo abriendo tres ventanas.*

Esta negativa necesidad, como fue, es por lo tanto el aspecto más difícil para los sujetos de aceptar. Sin embargo, es el criterio de entender el sistema global como un set de dicotomías que explican el punto de llegada en *C* y *G*, sin depender de empíricas (ó medio empíricas, medio inferenciales) verificaciones. Este sistema es un agrupamiento, aunque uno espacial (infralógico) el cual no pertenece a clasificar objetos discretos pero más que todo a encadenar senderos. Como tal, el trae un problema: Clasificaciones operacionales son construídas alrededor de las edades entre 7 y 8, con el conocimiento de inclusiones y sus cuantificaciones (por ejemplo, si *B = A + A’,* entonces *B > A* y *B > A’),* considerando en el presente caso que el agrupamiento es operacionalmente completo solo alrededor de los diez a doce años.

La razón para esta situación es clara, como así lo es, e instructiva también: las clasificaciones exitosas a la edad de 7 u 8 años están construídas en un orden ascendente, de la particular a la más y más general (por ejemplo, en la forma A + A’ = B, B + C, C + C’’ = D, etcétera; donde la notación “+” designa una conjunción forzada). **[24]** Por contraste, en la presente situación, las operaciones requeridas consisten en reconstrucciones en un orden descendente: D = C ó C’; C = B ó B’; B = A ó A’. Estas reconstrucciones reemplazan las conjunciones “+” (“y”) con disyunciones sucesivas (”o”). La razón substancial para esta **décalage ?** entre el “o” y el “y”es similar que cuando se está construyendo un agrupamiento, uno está restringido a adicionar nuevos elementos, ya sea en las clases ya constituídas, ó en una clase más general que las incluye; en el método descendente involucra una serie de disyunciones, uno debe siempre razonar sobre “posibilidades” mientras considera cada fila del sistema.

4. Conjunciones, disyunciones y operaciones binarias

Mucho antes ellos entienden el sistema global de los senderos seguidos, los sujetos claramente son capaces de ejecutar disyunciones locales , que es, usar “o” en varias situaciones particulares. Similarmente, el experimento en el capítulo 1 muestra que los niños que han sacado al perro de su caja, pueden moverlo ya sea a la derecha ó a la izquierda jalándolo hacia sí. Estas combinaciones contingentes y limitadas entre “y” y “o” **[25]** pueden, por consiguiente, tomar formas que son isomorfas para las 16 operaciones binarias de una lógica proposicional sistemática. Pero en el presente caso, ellas son nada más que coordinaciones temporales de acciones, las cuales simultáneamente general el “y” y el “o”, con la posibilidad de exclusiones tan parecidas como esas de implicaciones positivas. Tales localizadas, precoces coordinaciones son por supuesto expandidas cuando “agrupamientos” son logrados. En ese caso, de acuerdo a la dirección de inferencia, B = A + A’ conduce a la implicación: Si x es una B, es necesariamente “ya sea” una A, “o” una A’. Permítanos dar unos pocos ejemplos:

- Para empezar, nuestros senderos están obviamente basados en implicaciones de la forma B1 => A1, donde la flecha => (símbolo de implicación) expresa el hecho que yendo a través de A1 es una condición preliminar para continuar a B1, mientras que la implicación recíproca A1 <= B1 establece que yendo a través de B1 es una de las consecuencias de ir a través de A1.
- Por otro lado, no hay implicación en las relaciones tales como esa entre B1 y B5 (por ejemplo, tenemos ya sea p.q+□.q, y así **(dibujar)** ó p+□.q, y asi **(dibujar)**.
- Las más frecuentes conexiones binarias son la conjunción "y" en un orden ascendente y la exclusiva disyunción "o" (p w q) en un orden descendente.
- Disyunciones no-exclusivas (p.q+□)v(p+□.q) pueden ser observadas, por ejemplo, cuando el sujeto ha seriado 3 elementos A < B < C (estas tripletas pueden aparecer muy temprano) y ver que si A es la única más pequeña que las otras y C la más grande, el elemento "intermedio" B es ambas < y >.
- Notamos incompatibilidad (p.q+□)v(p+□.q+□) entre, por ejemplo, los pares (G5, G6) y (G7, G8), los cuales pueden ser escritos (p.q+□)v(p+□.q). En este caso, G1 a través de G4 podría no ser ni p ni q (=p+□.q+□).
- Negación de conjunto puede por lo consiguiente aparecer muy tempranamente: En el caso de las herramientas en el capítulo I, cuando el sujeto entiende como retroceder al animal, el excluye las dos acciones de empujar y desviación lateral, asi p.q.
- La equivalencia (p.q)w(p+□.q+□) es evidente cuando el sujeto entiende que la dicotomía ("usted siempre lo pone en el otro lado", dice *Jan* a la edad de 6) es repetida en todas las subdivisiones.
- Nosotros podemos hablar de "tautología" cuando es obvio para el niño (quién no necesita expresarlo) que el listón debe estar exactamente en una de las ramas en un rango dado, y en ninguno de los otros.
- Por contraste, la "contradicción" conectiva ó "siempre falsa", consiste solo de contradicciones específicas para ser evitadas, lo cual el sujeto no siempre hace (por ejemplo, en comportamiento preinstrumental, los sujetos más jóvenes realizan meramente desplazamientos erróneos sin siquiera jalar el objeto).
- Como por las "afirmaciones" ó "negaciones" involucradas en la independencia de p con respecto a q [(p.q)v(p.q+□)], ó de q con respecto a p, éstas son obvias en todas las edades y no hay necesidad de tratar con ellas aquí.

Nuestra primera conclusión es que algunas coordinaciones parciales y algunas veces temporales están presentes a niveles elementales, en formas que pueden ser comparadas con las 16 operaciones binarias de lógica clásica. Estas coordinaciones no dependen de todos estructurados, los cuales llegan a ser posibles solo al nivel de operaciones formales verdaderas, caracterizadas por el pensamiento hipotético deductivo y el grupo INRC. Desde el punto de vista de una lógica de significados, este hecho es importante en demostrar que desde el principio, las "formas" dependen parcialmente sobre contenidos mientras permanecen necesarios para asimilarlos.

La segunda lección que extraemos de ésta investigación es que una de las mayores y uniformes condiciones constitutivas del pensamiento formal (al nivel III) es la adquisición tardía de coordinaciones sistemáticas y permanentes entre “Y” y “o”, con respecto a distintos métodos ascendentes y descendentes de ir a través de un sistema dado.

3
COLOCACIÓN

Con B. Vitale y M. Zinder

Ahora iremos atrás a implicaciones de acción, con un estudio cuyo interés es doble como el se sostiene en ambos, un problema práctico y combinaciones de formas geométricas. El problema práctico es para cubrir el piso con baldosas de tal forma que ningún espació vacío será dejado entre las baldosas y así, el patrón podría ser continuado indefinidamente. Las baldosas tienen varias formas geométricas (Figura 3): cuadrados S (amarillo), triángulos isóceles T (blanco), Pentágonos P (azul), y hexágonos H (rojo). Los lados de S, P y H y la base de T tienen la misma longitud (8 cms.), y los ángulos de T son tales que cuando se colocan vecinos a P sus lados hacen una directa extensión de P. Todas las figuras están disponibles para los sujetos, quienes pueden disponerlas por el uso de elementos formados idénticamente (un mosaico compuesto solo de cuadrados es lo más fácil de construir sin vacíos, mientras que esto es imposible utilizando solo pentágonos) ó mezclando formas de varios modos (por ejemplo, cuando se llenan los vacíos con un arreglo de pentágonos con triángulos).

Podemos analizar dos modos de acción de implicaciones. Primero, algunas implicaciones solo anticipan arreglos que pueden ser hechos con figuras similares: por ejemplo, prediciendo que yuxtaposiciones de cuadrados embaldosarán el piso sin vacíos, y sobre todo (y este es un beneficio separado), que si tal composición es posible sobre una pequeña superficie, puede continuarse indefinidamente. Contrariamente, una yuxtaposición de pentágonos dejará “agujeros” que no pueden ser corregidos agregando más pentágonos.

Segundo, existen otras formas de inferencias que actualmente son más interesantes. Si uno puede hacer una composición completa con cuadrados, sin ningún triángulo (en nuestra notación, $S \cdot T + \square$) o con triángulos sin ningún cuadrado (en nuestra notación, $T \cdot S + \square$), es posible combinar las dos?

Por Ejemplo:

$(T \cdot S+\square)$ v $(S \cdot T + \square) \rightarrow (T \cdot S) = Sc$ (éxito); $(T \cdot P + \square)$ v $(P \cdot T + \square) \rightarrow (T \cdot P) = Sc$; mientras que $(S \cdot P + \square)$ v $(P \cdot S + \square) \rightarrow (S \cdot P) = S + \square$ (falla).

Estas inferencias desatan varias interrogantes: ya sea que los sujetos que tengan éxito en construir una composición con Ts solamente ó con Ss solamente concluirán que una composición sin vacíos puede ser formada por la combinación Ts y Ss; ya sea que una combinación exitosa $T \cdot P$ demuestre que la composición es posible con Ps solamente, que es errónea, ó con Ts solamente, la cual es fácil; y ya sea que el hecho que $T \cdot P$ es posible establece que $S \cdot P$, actualmente es una combinación imposible. En todos estos casos, las inferencias pertenecen a

relaciones entre patrones heterogéneos y homogéneos, los cuales suponen anticipaciones mucho más avanzadas y complejas.

Más aún, en este estudio, encontraremos de nuevo las 16 operaciones binarias con las que tratamos en el capítulo 2. Existen tres claramente distintos niveles de ejecución.

1. Nivel I

Sujetos en ésta primera etapa solo tienen éxito en manifestar una composición sin vacíos con cuadrados, y sin inferir que la composición podría continuar indefinidamente; de aquí que ellos fallan aún en ésta forma elemental de razonamiento recurrente.

NAD (6;7) ensambla seis cuadrados en un rectángulo: *Como esto, nosotros podemos hacerlo.* "Puede usted siempre agregar uno sin dejar agujeros?" *No, no lo creo (ella agrega alguno en el lado más largo de la figura).* "Bien, puede continuar, ó no?" *Sí (ella tiene ahora colocados 12 cuadrados). Podemos continuar como ésto, hacer aún uno más grande.* "Tan grande como lo desees?" *No.* "Si usted pone dos de ellos de este modo (dos cuadrados haciendo un rectángulo), como los llamaría?" *Porque tiene la forma de un cuadrado.* "Qué tal aquel (ella ha construído un rectángulo de 5 x 6 cms.)?" *No enteramente* (un cuadrado). Con hexágonos y tres cuadrados, ella compuso una larga serpiente y luego flores con vacíos triangulares entre sus pétalos. Ella señala un vacío y dice, *más adelante yo quiero hacer (por ejemplo, colocar algo ahí).* "Estará en capacidad de llenar todos éstos agujeros?" (solo hay cuatro de ellos)?" *No, pienso que nunca estaremos en capacidad de llenar todos éstos agujeros; siempre habrá agujeros.*

DAN (6;8) comienza con una bonita corona compuesta de 10 pentágonos, los cuales están unidos lado con lado, dejando un gran agujero en el centro de la figura. El trata de llenarlo con tres elementos: *No, no podemos llenarlo porque ahí* y ahí (él muestra los vacíos remanentes) *ellos no tienen la misma forma que éste!* Entonces él coloca 17 pentágonos en dos filas paralelas separadas por un espacio donde él pone más Ps. *No podemos hacerlo.* El rechaza usar otras formas (Hs). No obstante más adelante el planifica una nueva composición con Hs solamente y él advierte que esto trabaja *porque todos ellos tienen la misma forma.* Esto está en contradicción con lo que él aceptó para Ps. "Y con ambos (Ps y Hs juntos?" *Con Hs, sí, pero con Ps, no.* El construye rosetas con una *H* rodeada por Ps y deduce la conclusión que *no podemos cubrirla.* "Por qué?" *Porque allí (H) no es un cuadrado.*

COR (7;9) está acercándose al nivel II pero ella realmente no puede superar las dificultades del nivel I. Ella empieza con Ss, colocando un mosaico rectangular de 18 piezas. "Podremos continuar?" *Sí, talvez, y algunas veces no.* "Por qué?" Ella agrega un apéndice vertical y luego uno horizontal al rectángulo, ambos compuestos de tres elementos. Luego ella los acopla con la figura inicial, pero con un desplazamiento tal que un lado de los cuadrados adyacentes corresponden a dos medios lados de el cuadrado central. Como *DAN*, ella reacciona usando *Hs,* entonces meramente produce alineamientos muy irregulares o superficies con una mezcla de *Ss* y *Hs.*

Estas reacciones iniciales son primero que todo notables por la falta de alguna anticipación que ellas muestren a través del cuestionamiento, a tal punto que uno puede suponer que éstos sujetos no entienden la instrucción para llenar todos los vacíos. Pero este no es el caso. Más curioso es el ejemplo de los cuadrados, ya que, a la edad de 6 años, el niño entiende que es posible prolongar cualquier serie lineal (n → n + 1). No obstante, *Nad* y aún Cor parecen bloqueados a la idea de ampliar una superficie, aún una tan simple y sin vacíos como un set de cuadrados yuxtapuestos en un modo regular a lo largo de dos dimensiones. Por el contrario , aunque ella planea "poner algo allí" para llenar cuatro pequeños agujeros, *Nad* perentoriamente concluye que "nosotros nunca estaremos en capacidad de hacerlo; allí habrá siempre agujeros". Otra reacción extraña es comenzar con una larga serpiente mientras no olvida que el triunfo es establecer una composición. En suma, la característica del nivel I es el empirismo con el cual los sujetos están satisfechos, junto con inferencias mínimas, muchas de las cuales no se justifican – tal como la idea de *Dan* de que circundando una *H* con *Ss* cubriría mejor la superficie entera que rodeándola con *Ps.*

2. Nivel II

A los 7 – 8 años notamos algún progreso en inferencias y en ciertas combinaciones de elementos de variadas formas:

PAU (6;9) empieza con una flor: una *H* rodeada por *Ts* colocados sobre sus bases. Para encontrar si ella puede continuar, sin embargo, ella quita los *Ts.* "Podemos continuar así?" *Yo no sé pero yo estoy segura* (!). Ella coloca alrededor de 50 de ellos. *Ahora estamos seguros que podemos continuar.* Luego ella coloca alrededor de 24 *Ts* en una figura irregular pero sin vacíos, antes que arreglar mejor el todo. Con *Ps,* ella construye una larga corona y, para llenar su vacío espacio interior, ella reemplaza *Hs* por *Ts,* los que ella coloca en un círculo con los ápices en el centro.

***XAV* (7;5)** empieza sólo con *Ts,* arreglados en un forma irregular global, y llena los vacíos con otros *Ts* sin considerar la forma como un todo. Ella concluye, *Yo podría continuar siempre como esto. Yo pienso que no habrá agujeros porque están unidos.* "Podríamos cubrir el cuarto completo?" *Sí, es posible hacerlo en el cuarto completo.* Ella escoge otra forma global y construye una fina roseta con ocho *Ts,* con los ápices tocándose en el centro, pero ella se convierte en crítica: "Podremos siempre tener la posibilidad de llenar los agujeros?" *Eso no los llenará sean redondos en los bordes* (que es, cuando la figura se inserte en un espacio cuadrado como el cuarto). *Podríamos hacer un cuadrado más largo* (ella ensambla 15 *Ss* para formar un largo rectángulo y asevera es posible continuar haciendo lo mismo). "Y con los *Ss* y los *Ts*?" *No, no podemos.* Pero ella de hecho lo hace yuxtaponiendo dos cuadrados de cuatro a uno de sus esquinas, llenando los intervalos con *Ts.*

***BEA* (7;10).** Mientras arregla *Ps* en una corona, ella puede llenar los vacíos, mientras que con cuatro *Hs* ella ve que *podemos seguir indefinidamente.* Después de tener éxito con *Ss* y *Ts*, ella concluye: *Con Ts solamente yo puedo hacerlo, pero no con Ss y Ts* (juntos). **[26]** Ella espontáneamente trata con *Ps* y

Ss; haciendo una corona de *Ps,* con una *S* y unos pocos *Ts* en el centro. Esto falla, pero ella tiene éxito con un *H* y *Ts*: *Yo siempre continúo como esto.*

AUG **(8;10).** Primero ella hace una corona con *Ps* sin saber cómo llenar completamente el centro. No obstante, él se convierte en el primer niño que junta cuatro *Ps* lado con lado con las esquinas apuntando hacia arriba, cubiertos por otra fila de *Ps* con las esquinas apuntando hacia abajo, llenando luego los espacios con *TS*: *Y luego podemos continuar.* Juntando tres *Hs* en un arco de un círculo, nota que el vacío interior por si mismo está formado como una *H*: *Podríamos continuar bastante; eso es debido a la forma* (ella muestra el espacio vacío). Cuando continúa con *Ts* y *Hs*, ella dice: *Yo no sé si esto trabajará; talvez sí.* "Sabemos que podemos hacerlo con los *Ts* y también con los *Hs*; no es natural que tengamos éxito con ambos?" *No, no podemos estar seguros; debemos tratar.*

PAC **(8;9)** compone siete *Hs* con *Ss* en los lados externos. "Podemos llenarlos totalmente?" *No, cada vez que agregamos una S, se hará un nuevo agujero.*

BEN **(9;10)** reuniendo tres *Hs* muy cercanamente unidos en una forma triangular y, como *Aug,* él dice: Siempre podemos poner más allí porque el agujero tiene la misma forma (por ejemplo *H*).

JOS **(9;8).** Ella ensambla cuatro *Ps* y cuatro *Ts*: Aquí podemos continuar con *Ts.* Su conclusión completa: *Con Ts solamente podemos tener éxito (Sc), con Ps solamente no podemos (Sc = cierto), con ambos Ps y Ts no podemos (Sc = falso), y con Ps y Hs no podemos tampoco (Sc = cierto).*

Tales reacciones son interesantes en que las inferencias son desarrolladas en forma de implicaciones de acción, ya sea por anticipación de figuras por hacerse ó por deducción de una posible continuación. Como en el primer punto, las anticipaciones totales son raras; en su lugar, los sujetos consideran los espacios remanentes y predicen como ellos los van a llenar. Por otro lado, considerando el segundo punto, una implicación muy general es que cualquier figura sin vacíos implica su posible continuación (con la excepción de figuras circulares, las cuales deben permanecer circulares, por ejemplo, *Xav).* Cuando se llega a las razones para una tal continuación, *Pau* "no sabe pero está segura". Por contraste *Pau* y *Ben* construyen figuras con *Hs* solamente y descubren una razón en la forma de los vacíos, los cuales son también *Hs*. A la inversa, los sujetos ven perfectamente bien que los *Ps* rodeados por *Ss* nunca cubrirán la totalidad de la superficie desde que "cada vez que agregamos una *S,* este hace un nuevo agujero" (*Pac).* Sin embargo, a pesar de éstos varios adelantos, las deducciones que caracterizan este nivel son aún inadecuadas, especialmente cuando los niños deben predecir combinaciones de dos baldosas de formas diferentes (por ejemplo, la dificultad de *Jos*'s a la edad de 9).

3. Nivel III

Es a este última nivel que las inferencias y las implicaciones de acción juegan un crítico rol, ambos a través de su rigor y si productividad:

***MAC* (11;4)** construye dos rosetas con *Ts* concéntricos, pero llena los espacios con otros *Ts.* "Podemos continuar" (sin crear agujeros)? *Podemos continuar para tener una superficie indefinida porque siempre luce la misma y yo puedo imaginar que esta superficie es muy larga: Nosotros podemos demostrar que, de este modo, llegará a ser infinita.* "Por qué?" *Porque lo llena todo; por consiguiente, si continuáramos, sería la misma. Ella hace una nueva superficie, ésta vez simétricamente.* "Por qué?" *Todas las formas con un lado recto puede ser doblado en dos partes, lo cual hace ejes simétricos. Yo pienso que podemos hacerlos. El experimentador dibuja una figura con una circunferencia equivocada: Pienso que podemos hacerlo.*

***CAR* (11;4)** tiene las mismas reacciones iniciales que *Mac.* Entonces con *Ps* ella de una vez que uno puede llenar los agujeros con *Ts,* y por consiguiente solo con *Ps ahí siempre habrá un agujero.* Ella complementa dos *Ps* adyacentes con cuatro *Ts* y declara: *Eso es, yo hice un paralelogramo y hemos visto que en ese caso podemos continuar.* "Supo usted de antemano que allí había una solución (usando *T, S, P,* los cuales ella ya hizo) ó usted descubrió eso?" Nosotros podríamos saberlo (ella señala a las partes separadas).

***ARC* (11;6)** Después de mezclar *Ps* y *Ts,* ella dice: *La figura sería irregular, pero talvez es posible continuar como esto* (sin vacíos). "Y si agregamos *Ss?" Pienso que es posible – Yo estoy incluso seguro.* No obstante, el continúa con una forma regular y se siente confiado cuando él obtiene un paralelogramo: *Yo sé que puedo hacer una superficie infinita con un paralelogramo; lo mismo que solo con Ss, y también con Hs.* Si todas las formas fueran mezcladas: *Eso sería un poco difícil pero es posible si medimos los ángulos* (los cuales son, con respecto a los vacíos, obtusos ó agudos). No podemos hacer algo solo con *Ps.*

***ANI* (12;2)** también comienza con *Ps* y *Ts* pero, aunque acierta a que una continuación es posible, ella dice: *Esto es molesto porque siempre hay algo que poner* (por ejemplo, agregar en los vacíos), *pero es siempre mejor que en un desorden: No podemos probar nada.* Entonces como hizo *Arc*, ella trata de formar agujeros regulares. Mientras reconociendo que uno *puede siempre con figuras mezcladas,* ella está muy contenta de conseguir: *Un paralelogramo! Al final, esto hace una superficie* (una regular)! *Vemos que podemos agregar infinidad, pero aquí yo no sé* (como probarlo). *Esto es molesto: Yo puedo siempre algo pero, bueno, yo estoy molesta: No es una ley regular, nosotros agregamos al azar.*

Estos sujetos del más alto nivel son interesantes por los requerimientos que ellos establecen. Por supuesto que ellos establecen que una vez que una superficie de limitada sin vacíos es encontrada, aún si por anticipaciones parciales y observaciones paso a paso, será posible reproducirla indefinidamente por complementación de la figura por sus lados de conexión. Es posible también meramente ampliar la superficie inicial indefinidamente: *Mac* lo llama una "demostración que llegará a ser infinita de este modo". El está ligeramente más satisfecho cuando él dota sus figuras con ejes simétricos; Esto marca un principio de regularidad el cual garantiza iteraciones a través de semejanzas. Con *Car*, la necesidad de regularidad llega a ser clara: Obteniendo "paralelogramos" no solo asegura sino demuestra la posible continuación – el cual es un requerimiento

mucho más fuerte que antes; más aún, las variaciones en las formas de los vacíos puede ser compensada a través de variaciones complementarias en los ángulos. Finalmente con *Arc* y *Ani*, existe una aguda diferencia entre formas regulares, por un lado, de las cuales "superficies infinitas" pueden ser necesariamente deducidas, y de otro lado formas irregulares, las cuales indudablemente pueden ser continuadas a través de ajustes variables, pero el cual posee una "molesta confusión" *(Ani)* en lugar de una simple demostración.

4. Conclusiones

Este estudio es de especial valor en clarificar la evolución de los tres tipos de inferencias que caracterizan a nuestros tres niveles. En el nivel I, las anticipaciones están limitadas a aquellas permitidas por arreglos repetidos observables, ó a través de modificaciones observadas empíricamente. En el nivel II, las inferencias relacionadas con predicciones que van más allá de lo observable y están basadas en implicaciones necesarias, pero sin proporcionar "razones". Finalmente, en el nivel III, las inferencias están basadas en razones ó en posibles demostraciones.

i. En el nivel I las implicaciones de acción provienen de los dos tipos siguientes: (1) Un vacío en la composición puede (ó debe) ser llenado por un elemento similarmente formado (*S, H,* etc.); y (2) una vez una configuración está completa en espacio limitado, puede ser ampliada: "Podemos continuar así, y hacerla aún más grande" *(Nad),* ó "sí, talvez , y algunas veces no" *(Cor).* Por otro lado, no es posible hacerla "tan grande como usted desea". *Nad* resueltamente responde "no", como si "continuando así" presentó límites y "haciéndola aún más grande" no obligó a una análoga iteración para la sucesión de números naturales: n → (n + 1). La razón para tal limitación es obviamente que la recurrencia (el "siempre") no es observable y el sujeto aún razona o infiere solo con respecto a un dominio de objetos empíricos. Ya hemos visto en otra parte **[27]** que, cuando requeridos a poner n, n + 1, etc., objetos dentro de un recipiente transparente con una mano, mientras hace lo mismo en un recipiente no transparente con la otra mano, sujetos a este nivel afirman la igualdad de las dos cantidades, pero no están todos seguros que este sería el caso si continuaran agregando objetos "hasta que anochezca".

En el nivel II, ésta continuación ilimitada está inferida no solo como siendo posible, pero necesaria, aunque sin demostración. Cuando *Pau* asevera "no sé pero yo estoy seguro", ella probablemente quiere decir "yo no puedo demostrar ni justificar esto, pero estando en capacidad de continuar paso a paso necesariamente implica que tal continuación es ilimitada". Esta afirmación nos recuerda a un joven sujeto que a menudo decía: "Cuando lo sabemos una vez, lo sabemos para siempre". En otras palabras, la implicación de acción aquí está basada en una abstracción reflectiva y no está restringida, como en el nivel I, para deducir consecuencias lógicas de abstracciones empíricas como en la inferencia, "Si yo he tenido éxito haciendo éste ensamblaje sin crear ningún vacío, entonces yo puedo ampliarlo".

Finalmente, en el nivel III, los sujetos distinguen que *Ani* llama "una molesta confusión" la que ella está segura que puede prolongar indefinidamente sin deducir las operaciones detalladas (porque "agregamos al azar), de lo que ella llama una "superficie" (por ejemplo, una regular y simple configuración). A propósito, ella descubre que ella puede construir "un paralelogramo: Al final éste hace una superficie!" Ella quiere decir que una iteración puede ser demostrada a través de un

set de conexiones fácilmente deducibles. Esta búsqueda por regularidades aparece primero con *Mac*, quien actúa con tanta seguridad encontrando ejes de simetría, aún en una forma aberrante él es presentado con, y es manifestado más adelante por *Car* y *Arc* quienes, como *Ani,* construyen paralelogramos. *Arc* dice, “yo sé que con un paralelogramo podemos hacer una superficie infinita”.

Así, podemos distinguir tres formas de implicaciones de acción. La primera puede ser llamada una implicación de “acondicionamiento” porque pertenece a las condiciones necesarias y suficientes del éxito; en éste caso, encontrando elementos que tengan la misma forma como el vacío. Tales implicaciones, que pueden ser observadas tan temprano como el nivel I, capacita a los sujetos para estar seguros que ellos pueden “ampliar” ó repetir lo que ellos acaban de hacer, pero no permiten una infinita generalización, porque uno nunca sabe lo que puede pasar.

Podemos llamar a la segunda forma una implicación de “amplificación” en la que ella padece las consecuencias de lo que ya ha sido empezado. Esto es lo que pasa en el nivel II, y puede ser explicado como sigue: Si uno tiene éxito en ampliar lo que ya ha sido hecho, entonces allí no hay ninguna razón para que uno no pueda continuar (vea las respuestas de *Xav).*

La tercera forma, la que puede ser llamada una implicación de”justificación”, da las razones que permiten una reiteración indefinida. En el caso de configuraciones regularmente formadas, tales razones son obtenidas a través una fácil demostración (las “superficies” de *Ani*, las cuales ella contrasta con la “confusión” inicial).

ii. Más allá de éstas formas de implicaciones, considerando que todas las tres son válidas en principio, podemos agregar lo llamamos implicaciones asumidas ó débiles. Estas están basadas en información parcial, y aún ellas parecen ser lógicamente defendibles. Una típica ocurrencia es cuando el sujeto sabe que pueden ser hechas con formas *x* exclusivamente y también con formas *y* exclusivamente, y es cuestionado para predecir $x \cdot y$; que es, predecir que ambas *x* y *y*, con ningún soporte adicional de una tercera forma *z,* producirá. Por ejemplo, asumamos que *Ss* produce una superficie sin vacíos y que *Ps* produce una superficie conteniendo vacíos. Es muy lógico predecir que $S \cdot P$ también tendrá vacíos. En el caso paradójico cuando las exclusivas *Ss* y *Hs* son ambas exitosas *(Sc),* el sujeto es inducido a creer que $S \cdot H$ podría tener éxito, al menos, así como -- considerando, en efecto, que ellas producen vacíos triangulares, y el éxito llega a ser posible solo con la asociación ternaria $S \cdot H \cdot T$. En este caso, a pesar de su parecida forma lógica, la implicación $S \cdot H \rightarrow Sc$ puede ser mantenida solo mientras una información adicional a través de observaciones y anticipaciones no haya sido obtenida

Estas “implicaciones asumidas” varían en nuestros tres niveles. En el nivel I, los niños aprenden a planificar solo composiciones homogéneas sin coordinar formas, de tal forma que el problema no surge. Cuando es expuesto por el experimentador, el sujeto responderá como *Dan* quien, cuando es cuestionado sobre *Ps* y *Hs* juntos, solo afirma que la composición es posible con cada uno de ellos tomado separadamente.

En el nivel II, uno encuentra una mezcla de respuestas correctas, respuestas equivocadas y renuencia a sacar conclusiones. Por ejemplo, *Bea* (7;10) asevera que hay éxito *(Sc)* con *Ts* solo y *Ss* solo, pero ella predice falla *(S+)* con ambas *Ss* y *Ts,* lo cual es erróneo. *Aug* (8;10) está equivocado ó se resiste a emitir algún juicio: *Ts* solo ó *Ss* solo son exitosos , pero una combinación de ambos no lo es. Cuando se le cuestiona sobre ambos *Ts* y *Hs,* él contesta: *Yo nunca supe si esto*

trabajaría. Talvez si lo haga. "Nosotros sabemos que podemos hacerlo con el *Ts* y también con el *Hs;* no es natural que tengamos éxito con ambos?" *No, no podemos estar seguros, debemos tratar.* Como para *Jos* (9;8), ella da una serie de respuestas correctas y equivocadas: Uno tendrá éxito solo con *Ts,* pero no solo con Ps, ni con ambos *Ps* y *Ts* (*S* + = *errado),* ni con ambos *Ts* y *Hs(S*+ = *equivocado),* y "con *Ps* y *Hs* no podemos tampoco" (*S*+ = correcto).

Es solo en el nivel III que el problema es resuelto. *Car* está aún en capacidad de adquirir una composición ternaria *T* · *S* · *P,* aseverando que es deductivamente predecible y mostrando la composición detallada que soporta ésta deducción. Como por la interrogante de implicaciones asumidas ó no validadas, el nivel III es interesante en que los sujetos tienden a focalizar de una vez – y a menudo constantemente – sobre la relación entre las dos, tres o cuatro figuras más que sobre formas aisladas consideradas absolutas. Esta relativización por supuesto juega un importante papel en la búsqueda de demostraciones o "razones".

iii. Nosotros aún tenemos que tratar con operaciones sobre significados interrelacionados, los que como hemos dicho, son isomorfos con respecto a los 16 conectivos interproposicionales. Permítasenos primero notar que no hay diferencia aquí entre significados de objetos y significados de acciones. Como el objetivo se fijado por el sujeto es obtener un mosaico sin vacíos, el significado de acciones consiste de éxitos o fracasos y por tanto está basado sobre resultados de manipulaciones. Los significados de objetos se basan en "qué puede hacerse con ellos", por tanto refiriéndose en todos los casos a acciones ejecutadas sobre ellos. En los abstracto, los objetos los objetos pueden ser clasificados con respecto a su forma, como *Nad* inicialmente lo hace en el nivel IA, ó ellos pueden ser seriados con respecto al número de lados que tienen (de 3 para *Ts* a 6 para *Hs*), y tales series están implícitas en todos los niveles. Sin embargo, en el contexto de trabajo, el significado de objetos descansa en la posibilidad o imposibilidad de obtener la composición requerida. En ésta situación, los enlaces que el sujeto establece o trata de establecer se tornan isomorfos con las familiares 16 operaciones interproposicionales. Esto no sorprende desde que la tarea implica un elemental sistema combinatorio y en donde los únicos valores verdaderos en los informes de los sujetos justamente describen lo que ellos han estado haciendo y las razones de sus éxitos o fracasos.

Para empezar debemos distinguir las cuatro operaciones que expresan la independencia de *p,q*, ó sus negaciones, las que usualmente están escritas como sigue:

(*p* · *q*) V (*p* · *q*+insertar símbolo aquí), (*p*+ · *q*) V (*p*+ · *q*+insertar símbolo aquí), (*p* · *q*) V (*p* + · *q*) y (*p* + · *q*+insertar símbolo aquí).

Esto ocurre cuando el sujeto trata de construir una composición con una de las cuatro formas sin relacionarlas a otras, lo cual es exitoso con *T*, *S* y *H* pero falla con *P.*

Segundo, existen las conjunciones (*p* · *q*), las que desde el punto de vista de significados tiene dos formas distintas: Conjunciones "libres" tales como *T* · *S*, las cuales son exitosas cuando las dos formas están combinadas como cuando ellas están separadas; y conjunciones "constreñidas" tales como *P* · *T*. Sobre ésta última, un sujeto del nivel III dice que uno tiene éxito usando *Ps* porque "hemos añadido *Ts* de cualquier modo".

Tercero, encontramos el equivalente de disyunciones exclusivas ó exclusiones recíprocas en el caso de *H* · *S*, una combinación que, sin una tercera forma, siempre falla. Disyunciones no-exclusivas están ilustradas por el caso (*T* · *S*+*insertar símbolo aquí* V (*T*+ · *S*) V (*T*· *S*) [compare (*p* · *q*) *V* (*p* · *q*+insertar símbolo aquí V (*p* + · *q*)].

Finalmente, podemos claramente observar equivalencias, así como combinaciones que corresponden a operaciones ternarias. En todos los casos, solo acciones y sus significados están involucradas. Proposiciones extensionales no están, aún si los sujetos traducen lo que ellos hacen a informes verbales exactos.

---

[26] La operación puede ser simbolizada (donde *Sc* = *Éxito):* [(*S* → *Sc*) · (T → *Sc*)] → *Sc*; ó [(*S* → *Sc*) · (*T* → *Sc*)] → (*S* · *T* → *Sc*). Las mismas operaciones son vistas con *Xav.*
[27] Piaget J., & Inhelder B. *The Child's Construction of Quantities*: *Conservations and Atomism.* New York Basic Books, 1974.

4
IMPLICACIONES Y SIGNIFICADOS ARITMÉTICOS

Con I. Berthoud y H. Kilcher

Hemos visto en los capítulos 1 a 3 que las implicaciones de acción juegan un esencial rol con respecto a objetos externos y en problemas que requieren que requieren alcanzar un objetivo y de aquí que involucre solo éxitos y fallas prácticos. Qué pasa cuando los objetos relevantes son entes creados por el sujeto, tales como los números, y cuando las respuestas permisibles pueden ser solo traducidas en términos de "correcto" ó "equivocado" – que es valores verdaderos? Tendremos que admitir que las únicas implicaciones involucradas son implicaciones entre formulaciones? O encontraremos que las formulaciones solo describen o formulan verbalmente un set de operaciones, las implicaciones siendo el actual y necesario origen de que las formulaciones conduzcan al nivel de las comunicaciones?

Este capítulo acordemente ataca un problema que es no solo esencial para nosotros pero tiene también una significancia epistemológica general. Desde que debemos distinguir entre matemática "intuitiva" al nivel de invención y matemática "axiomática" al nivel de las más obligadas demostraciones, es natural investigar el rol jugado por implicaciones entre operaciones en el primer nivel y lo que queda de ellas en el segundo. Similarmente, si no interpretamos el término "constructivismo" de acuerdo al significado restringido de Brouwer, entonces la matemática intuitiva obviamente consiste construcciones continuas de operaciones cuyos significados están interrelacionados por innumerables implicaciones. En las siguientes páginas, analizaremos la génesis de tales coordinaciones como ellas toman lugar en situaciones elementales.

El capítulo está dividido en dos secciones. La primera trata con las relaciones entre números ordinales y cardinales y con sus implicaciones mutuas. La segunda sección es un análisis de las condiciones preliminares y necesarias de contar, específicamente contar en un orden circular.

SECCIÓN I: NÚMEROS ORDINALES Y CARDINALES

El primer aparato experimental simplemente consiste de dos cajas (Figura 4). Conectando la más alta *(H)* y la más baja *(L)* está un tubo opaco a través del cual cincos (canicas) pueden ser dejados caer uno a uno manualmente. El aspecto ordinal de la tarea surge del ordenamiento de elementos yendo de *H* a *L* como una función de la sucesión temporal de caídas, considerando que el aspecto cardinal surge de el número de elementos que permanecen en *H* ó colectados en *L* después de cada caída; lo que es, que el se refiere a los estados de *H* y *L* (antes que una caída sea ejecutada, cuando la 'n' canica es dejada caer, cuando arriba a *L*, etc.). Los números cardinales en *H* y *L* son obviamente complementarios con respecto a la cantidad total de canicas: *T = H + L.* Preguntas pueden dirigir anticipaciones (antes de dejar caer las canicas) ó reconstituciones (después de las caídas), los contenidos de las cajas estando naturalmente ocultos a la vista.

Insertar aquí la Figura 4

Nosotros ideamos dos situaciones experimentales. En la situación I, el total *T* inicialmente asciende a 11 canicas en *H* (o menos de 11 para sujetos más jóvenes) y 0 en *L*. Los niños fueron primero requeridos a predecir: "Antes de la caída de la 5ª canica, cuántas canicas habrá en *L* y en *H*?" Ellos fueron requeridos para ejecutar la acción: "Dejen caer las canicas una por una y paren antes de la 5ª caída". *H* y *L* están entonces cubiertos y las mismas preguntas sobre sus números cardinales les fueron hechas. De aquí que, en ésta situación, el niño debe inferir los números cardinales de la información ordinal.

En la situación II, la suma de *T* es 15 canicas en *H*. Los sujetos fueron requeridos a predecir: "Usted va a dejar caer 10 canicas de *H* dentro de *L*, una a la vez. Estará la 4ª en *L* ó en *H*? Y la 7ª? La 10ª? Cuántas canicas habrá en *H*? La 13ª? Cuántas otras canicas?" Luego se les dijo, "Dejen caer 10 canicas dentro de *L*". Una vez que la acción fue ejecutada, *H* y *L* son cubiertas y las preguntas son repetidas sobre cuántas ordinales se encontrarán en cada caja. Aquí, las ordinales deben ser inferidas de la información sobre las cardinales y las implicaciones involucradas son recíprocas para aquellas requeridas en la situación I.

Nosotros hemos estado en capacidad de establecer cuatro niveles.

1. Nivel IA

Para empezar, aquí hay ejemplos de el primer nivel, caracterizados por la dificultad en disociar el todo *T* en sub-sets *L* y *H*, por lo menos (ó primariamente) en la situación I:

***BRI* (5;0).** Situación I, fase de acción, con *T* = 8. “Pare antes de la 4ª caída”. (Ella deja caer 5) “Cuántas hay ahí en *L?”* (No responde) “Usted hizo esto cinco veces con su mano. Por tanto, cuántas hay en *L?” Cinco.* “Y en *H?” Yo no sé.* A la niña se le dan ocho canicas otra vez. “Pare después de la 4ª....Cuántas de ellas ha dejado caer usted ya?”: *Tres* **[28]** “Cuántas han sido dejadas en *H?” Siete.* Otra vez, con *T* = 4: “Pare antes de que la 3ª caiga”. *Tres de ellas estarán en L.* “Y en H, entonces?” *Cuatro.* Situación II, con *T* = 7: “Yo puse 5 ahí – Donde está la 2ª?” (No responde).

***DAN* (5;6).** Situación I, fase de anticipación: “Cuántas canicas habrá en *L* antes de la 5ª caída?” *Yo pienso que no habrá ninguna.* “Habrá alguna, ó no”? *Sí, 11.* Por tanto, están todas o ninguna. Cinco canicas son entonces dejadas caer: “Cuántas hay en *L?” Cinco.* “Qué llamaría usted a la que está a punto de caer?” *La 6.* “Cuántas hay aún en *H*?” *Seis, no 11.* “Por qué dice usted 6?” *Yo creo que mi conteo estuvo equivocado.*

Situación II con *T* = 10, 5 de las cuales son dejadas caer: “Está la 3ª en *L* ó en *H*?” *En L.* “Por qué?” *Porque fue puesta en el tubo.* “Dónde está la 5ª?” *En L.* “Y la 7ª?” *En H.* “Qué otra está en *H*?” *La 8.*

La situación I es repetida con 8 canicas en *H*: “Paramos antes de tirar la 4ª. Dónde está la 4ª?” *En H.* “Cuántas hay ahí en L?” *No hay ninguna.* “Por qué?” *Porque está totalmente vacía.* “Y cuántas en *H*?” *Yo no sé.* “Podría decir?” *Alrededor de* 8*, pero no, alrededor de* 6*, no* 10, pienso yo.

***CAT* (5;6).** Situación I, fase de acción, con *T* = 10: “Dejemos caer 7 canicas dentro de *L”* (Ella deja caer todas las diez). *Habrá 7 porque había 10.* “Pero yo le pedí que dejara caer solo 7”. *Nunca podemos tener 7 con 10.* Por tanto el total cardinal *T* no está disociado. Como por acciones, para “parar antes de la 5ª” ella cuenta *una* por la acción de tomar la 1ª, *dos* cuando ella la lanza en el tubo, *tres* por la segunda, cuatro por la 3ª, y ella concluye: *Yo dejé caer 4.* “Al principio teníamos 11 en *H*. Usted dejó caer 4 en *L.* Por tanto cuántas quedaron en *H?” Ahí hay 10.*

Todos los sujetos del nivel IA saben como contar hasta 15 ó más. Las respuestas son de interés en revelar qué poco uso es hecho de ésta numeración verbal en sus cuantificaciones cardinales, ó aún en sus cuantificaciones ordinales. La razón para esto es indudable que a éste nivel, los numerales “1”, “2” y “3” y así sucesivamente son nada más que nombres momentáneos por medio de los cuales el niño provisionalmente distingue los elementos homogéneos individuales en una colección dada: “uno” es el nombre de el primer elemento discriminado, “dos” su sucesor y así sucesivamente, pero ningún significado cuantitativo está aún adherido a ellos. Consecuentemente, cuando el elemento ‘n’ de un todo *T* es dejado caer de *H* a *L*, éstos sujetos no deducen la conclusión de que el set *T* está dividido en dos sub-sets *L* y *H.* Ellos concluyen ya sea que todo ha caído, puesto que ‘n’ es parte de este todo, ó que nada ha caído, ya que el único elemento nombrado (el ‘n’) no está aún en *L*. De aquí que, *Bri* “no sabe” lo que está en *H* y *L* después de las caídas; con *T* = 4 y 3 caídas dentro de *L*, ella concluye que 4 son dejados en *H*; después que las canicas han sido dejadas caer, *Dan* piensa que ahí está todo (*T*) ó nada en *H* tanto como en *L*; cuando *Cat* es requerida a dejar caer 7 canicas, ella deja la totalidad (*T* = 10) de canicas ir abajo, porque 7 está incluido en 10; sin embargo, ella se niega a considerar las 7 canicas como un sub-set cuantificable porque “nunca podemos tener 7 con 10”. Como para cuantificaciones ordinales, los tienen éxito en contar sus sucesivas acciones; *Cat*, sin embargo, como varios otros, asocia

el número “uno” a la acción de recoger la 1ª canica y el número “dos” a dejarla caer dentro del tubo – por tanto, ella cuantifica como “cuatro” las tres canicas que han sido dejadas caer.

En una palabra, éste primer nivel está caracterizado por comportamiento el cual toma lugar antes de la cuantificación. Por consiguiente, nuestro estudio de las relaciones entre números ordinales y cardinales que tratan mas generalmente con la formación de números como una cantidad: En otras palabras, sobre la elaboración de un sistema de significados los cuales son tan fundamentales que uno podría haberlos creído dados en las experiencias tempranas con objetos, por cuanto ellos actualmente dependen de actividades más complejas que las esperadas. Por lo tanto, a este nivel inicial, una acción puede bien dividir el todo *T* en un sub-set de “canicas que van” de *H* a *L* y un segundo sub-set de “canicas que permanecen” en *H*, no obstante el todo retiene su significado como un objeto indivisible. Las partes de éste objeto comparten la misma extensión, como si esto fuera una propiedad de una clase cualitativa y sus sub-clases (recuerde, en otro experimento, el ejemplo de “flores” y “daisies” las cuales también son “flores”). **[29]**

2. Nivel IB

Incluimos en éste nivel un número de casos intermedios que representan una transición para el establecimiento de relaciones cuantitativas entre el número de canicas en *L* y *H*:

***ARO* (5;9).** Situación I, fase de anticipación, con *T* = 11: “Si paramos antes de la 5ª caída, dónde está?” *En H.* “Cuántas hay en *L*?” *Yo no sé....4.* “Y en *HT*?” *Yo no sé.* “Aproximadamente?” *Diez.*

Situación II, con *T* = 13: “Si dejamos caer 10 canicas, estará la cuarta en *H* ó en *L*?” *En H porque aún no han sido puestas. No lo podemos saber si no hemos hecho nada.* Situación II, fase de acción, con *T* = 13: “Deje caer 10. Dónde está la 4ª?” *Se fue para abajo. “Y la 7ª?” Porque yo dejé caer 10 canicas, la 7ª también cayó.* “Qué de la 13ª?” *No está en H.* Con *T* = 8: “Antes de la 4ª caída, cuántas hay en *L*?” *Tres.* “Y cuántas en *HT*?” *Ocho.* “Al principio teníamos?” *Ocho canicas. De allí que ya no hay ocho.* “Entonces cuántas?” *Cinco. Yo no conté aquellas* (las 3 en *L*); *Yo conté solo aquellas* (las restantes = las 5 otras).

***LAV* (5;6).** Situación I con *T* = 11, anticipación: “Cuántas antes de la 5ª caída” *Cuatro* (en *L*). “Y en *H*?” *Seis, no porque está muy cerca de la* 5. “Entonces?” *Diez, porque no está cerca de la* 5. Después de dejar caer las canicas: *Hay* 9 (en *H*). *Puede haber* 9 *ó* 10 *canicas*; *Yo pensé 9.*

***ANA* (6;6).** Razones en parte en el nivel IA cuando *T* = 11, pero correctamente cuando *T* = 8. Con *T* = 11, antes que la 5ª canica caiga hay 4 canicas en *L,* pero 10 en *H:* un poco menos que 11 ó simplemente 11 menos la 5ª. Con *T* = 8, hay 3 en *L* (antes de la 4ª caída) y 5 en *H: I contada.* “Por qué usted no cuenta arriba de 6?” *Porque de otra manera habría 9 en H* (= número total) *y necesitamos solo 8 canicas para el juego.*

***CRI* (6;8)** distingue dos sub-sets como tales, lo que es, las canicas en *L* como caídas y aquellas *que aún permanecen en H.* El las cuenta con sus dedos, pero haciéndolo así él continúa el conteo de los primeros! Con *T* = 11: “Cuántas en *L* antes de la 5ª caída?” *Cuatro.* “Cómo lo hizo?” *Yo casi calculé*: *Uno, dos, tres,*

cuatro, cinco y dejamos fuera 1, de modo que eso hace 4. "Y en *H*?" *Yo conté: Cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, de modo que aún hay 11* (en *H*).

***MAR* (6;11).** Situación I con *T* = 11, anticipación: "Cuántas antes de la 5ª caída?" *Hay 5 en L si la 5ª.se va hacia abajo.* "Y en *H*?" *Talvez también 5: Si hay 5, bien habría ahí 5 en H* (simetría). Con *T* = 8, "antes de la 4ª caída?" *Tres porque el 3 está antes del 4.* "Y en *H*?" *Yo no puedo saberlo porque desconozco la cantidad total.*

El mayor avance a este nivel es que la numeración verbal tiene ahora el significado de una cuantificación la cual responde a la pregunta, "cuántas?" Esto posibilita a los sujetos a liberarse a si mismos de la reacción al "todo o nada" la cual caracteriza al nivel IA y para discriminar dos sub-sets dentro del todo *T*: Por ejemplo, *Cri* habla del sub-set de canicas "que caen" de *H* a *L* y del sub-set de aquellas "que aún permanecen" en *H.* La última observación de *Mar* claramente indica una subdivisión cuantitativa del todo: si el total es desconocido, tres canicas dejadas caer pueden ser cuantificadas, pero nada puede decirse de las restantes en *H* "porque desconocemos la cantidad total". Aunque existe un progreso real, hay un comportamiento frecuente el cual parece como un residuo del nivel IA la reacción al "todo ó nada"; a efecto de cuantificar "aquellos que permanecen",*Cri* (tanto como varios otros sujetos) no las cuenta separadamente pero continúa contando desde el número de canicas en *L;* de aquí que, una vez se le han dado los numerales para las canicas en *L*, *Cri* continúa contando "cinco, seis, siete, ..., once", para las canicas en *H*; en lugar de concluir que las canicas 5-11 están en *H*, que once quedan a través de identificar falsamente "lo que queda" en *H* con el todo *T*! Por otro lado, *Aro* comienza con la igualdad *T* = *H*, y tan pronto como el recuerda que *T* = 8, él puede deducir "que ya no hay 8 canicas (en *H*), sino 5", porque 8 menos las 3 en *L* hacen 5. Generalmente hablando, hay aún muchas dificultades en este nivel cuando *T* = 11 ó más, pero el problema simplificado *T* = 8 permite muchos éxitos: Cuando *Ana*, quien ha disociado el todo *T* = 8 entre *L* = 3 y *H* = 5, es cuestionada "por qué 5 y no 6", ella contesta "de otro modo la suma sería 9 (*T* en *H*) y solo necesitamos 8 canicas para el juego". Por contraste, la situación II casi siempre descubre respuestas correctas, logradas a través de anticipaciones.

3. Niveles II y III

Al nivel II, los dos sub-sets están mejor disociados, dando salida a dos conteos separados, aunque existen errores debido a la habilidad del conteo. Aquí hay ejemplos, comenzando con un caso intermedio entre los niveles IB y II.

***SER* (7;1)** aún falla en la situación I con *T* = 11. Pero con *T* = 8 él cuenta con sus dedos las canicas en *L* (1, 2, 3), y en *H* (1 – 5), omitiendo las canicas que ya han caído, y por consiguiente disociando los dos sub-sets. "Ahora es útil conocer que tenemos ocho canicas todas juntas?" *Sí, ayuda a calcular.* Tres tandas de dos canicas cada una son dejadas caer. "En qué tanda estaba la 5ª?" *En la última.* "Cayó la cuarta?" *Sí, porque 5 es mayor que 4.*

***LAI* (7;5).** Situación I con *T* = 11: "Cuántas habrá allí en *L* antes de la 5ª caída?" *Cuatro, y la 5ª está aún en H.* "Cuál es el número total?" *Once* "Cuántas quedan en *H*?" *Nueve.* "Por qué?" *Yo conté las canicas (T), luego yo boté la 5 y encontré 9* (como si 11 – 5 = 9). Fase acción: "Cuántas hay allí antes de la 6ª caída?" *Cinco en L.* "Y en *HT*?" *Ocho.* "Cómo lo hizo?" *Yo cuento cuatro en L, luego cuento cinco,*

seis, siete, ocho, nueve, diez, doce, luego las cuento (con los mismos dedos) *de uno a ocho.* Esto por tanto no es una mera continuación del conteo como con *Cri* (nivel IB), pero una implicación que permite el set de ordinales 5ª a 12ª para tener el número cardinal 8.

***PAT* (7;2).** Situación I con *T* = 11: "Cuántas habrá ahí antes de la 5ª caída?" *Cuatro en L.* "Y en *H?*" Ella cuenta de uno a once, toma de uno a cuatro y luego cuenta las canicas remanentes. *Ah! Eso es* (perspicacia), *7 han quedado!* (contando otra vez separadamente las canicas de 5 – 11). "Qué hizo?" *Yo sé que allí hay 4 en L. Yo cuento una vez para obtener 11: las primeras* (1 – 4) *no cuentan. Yo cuento las otras otra vez* (por tanto, 1 – 7).

Situación II, anticipación: respuestas correctas a todas las preguntas ordinales con *T* = 15 y *L* = 10. "Cuántas hay ahí en *H*?" *Es difícil saberlo.* Ella cuenta 1 – 15 y luego de 11 – 15: *Eso hace cinco.*

***AND* (7;1).** Situación II, anticipación con *T* = 15 y 10 caídas: El da los números ordinales correctos. Como para los cardinales, él cuenta 15 y toma 10, por tanto *H* = 5.

***CLA* (8; 1).** Situación I con *T* = 11, anticipación: *Talvez hay 8 en H. Si añadimos los 4 que están en L, eso hará 11.* Con *T* = 8: *Tres canicas pasan dentro de L, pero no cuatro, cinco, seis, siete, ocho, ...eso hace 5.*

***SAN* (8; 6).** Anticipación con *T* = 11: *Cuatro en L y luego cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once. Eso hace 7"*

Aquí hay ahora ejemplos del nivel III (adiciones y sustracciones):

***JOE* (9; 6).** Situación I con *T* = 11, anticipación: *Cuatro en L.* "Y en *H?" Siete* (sustracción: 11 – 4). "Cómo lo sabe?" *Hay cuatro en L y luego yo conté* (los que quedaban). Con *T* = 15, 10 caídas: "Dónde está la 10ª?" *En L.* "Cuántas hay en *H*?" *Cinco.* "Cómo lo sabe?" *Porque 10 han sido dejadas caer y la suma es 15* (por lo tanto 15 – 10 = 5). Con *T* = 8, 3 de las cuales están en *L*: "Cuántas en *L* y en *H*?" *Tres en L, 5 en H.* "Cómo lo hizo?" *Hay 3 de ellas en L, más qué se necesitaba para hacer 8* (por tanto 8 – 3 = 5).

***RIC* (9;4).** Situación I con *T* = 11, anticipación: *Hay 4 en L.* "Y en *H*?" *Siete quedarán.* "Por qué?" *Porque yo hice 4 más 7* (adición), *luego tomé 7* (de 11: sustracción).

***ELI* (9;2).** Situación I con *T* = 11, anticipación: *Cuatro en L, por consiguiente 7 en H: 4 más siete hacen 11.* Situación II con *T* = 15 y 10 dejadas caer. *Eso hace 5.* Con *T* = 8: *Tres en L, luego eso hace 5* (en *H*). "Muéstremelo con sus dedos". (El lo hace). "Niños pequeños hacen lo mismo pero ellos dicen que hay 8 en *H*. Cuál es su equivocación?" *En vez de mirar en sus dedos* (el cardinal en *H*), *ellos dicen que el último número que ellos dijeron* (en otras palabras, el último ordinal cuando enumeraron *T*)!

***LAC* (9; 5).** Situación II con *T* = 15, anticipación: *Al final, tenemos 5 porque* 10 + 5 = 15. *No diremos 6, esto significaría que dejamos caer 9.*

El avance distinto del nivel II sobre el nivel IB es la clara disociación de los dos sub-sets *L* y *H* dentro del todo *T.* Los números de canicas en *L* es fácil de determinar porque expresan las sucesivas acciones de caída, la cual es una ordinación de acciones físicas ya sea efectuadas ó anticipadas. De aquí, que el éxito es obtenido en el nivel IB. En contraste, desde la 'n' caída y subsiguientes, el sujeto va con una numeración ordinal, la cual es simplemente verbal ó auxiliada con

los dedos como un soporte físico (por tanto, con *L* = 4, *Lai* dice “entonces yo cuento 5, 6, ...etc., hasta la última)”. La novedad del nivel II con respecto al nivel IB es que el niño entiende que “los cuatro primeros no cuentan” (*Pat*) y por consiguiente las canicas cinco a once deben ser contadas separadamente: Por consiguiente, *Pat* cuenta de nuevo “los otros” ó “los que quedan” (5-11), en *H*, pero ella hace lo mismo a través de una nueva enumeración la cual, siendo la suma de elementos en el sub-set *H*, se convierte en una cardinal. Actualmente, ésta complicada maniobra, típica del nivel II, es un equivalente funcional ó una preparación de las operaciones de adición y sustracción. Para decir que “las primeras cuatro no cuentan” (*Pat*) es equivalente a removerlas del todo, y por consiguiente actuar fuera de la sustracción. Para decir “y luego” (*Pat, San y otros*) cuando van de elementos en *L* a lo que queda por encontrar en *H* a manera de constituir el todo *T*, es el equivalente de una operación aditiva.

Tales adiciones y sustracciones se hacen explícitas en el nivel III. Cuando *Joe* dice que “hay tres canicas en *L*, más lo que es necesario para hacer ocho”, el término “más” concientemente denota adición. Cuando *Ric* dice que él “hizo cuatro más siete, luego tomó siete”, porque dejando caer cuatro de once deja siete (en *H*), la tematización de adiciones y sustracciones es igualmente aparente. Más adelante notamos que la claridad de *Eli* en explicar los errores que ocurren en los niveles tempranos por niños que, careciendo de una adecuada disociación de los dos sub-sets, confunden el número de canicas en *H* y *T*.

4. Conclusiones

Un número cardinal es un set que es conservado en un todo simultáneo, cualquiera que sea el orden posible de enumeración de sus elementos considerados como unidades equivalentes. Un número ordinal es (uno de) una sucesión de rangos, cada uno de los cuales es definido por el número cardinal de sus predecesores [n insertar símbolo n + 1]. Obviamente, como se mostró por las reacciones del nivel II, dos mutuas implicaciones conectan cardinación y ordinación, aunque esto no significa que ellos sean idénticos, sino que ellos necesariamente dependen el uno del otro: (1) El ordinal implica al cardinal, desde que el significado adherido a un rango está determinado por el cardinal de su predecesor; que es, el rango ‘n’ perteneciente al elemento precedido por cardinales n – 1; (2) El cardinal implica al ordinal porque si sus elementos son equivalentes (y deben ser considerados como tales), la única forma de distinguirlos es enumerarlos en un cierto orden.

Por consiguiente, es solo natural que en nuestros experimentos los sujetos hagan inferencias sobre cardinales de información ordinal y viceversa. Pero primero, ambos tienen que ser distinguidos. La distinción parece fácil de trabajar, ya que los ordinales son establecidos a través de las acciones de caída de elementos de *H* a *L,* mientras que los cardinales permanecen estables ya sea en *H* (como elementos que han sido dejados caer) ó en *L* (como elementos resultantes de las caídas). Los experimentos exponen un hecho interesante: Evaluar el número de elementos en *L* es fácil porque ellos han sido agrupados allí a través de acciones, pero el número de elementos en *H* es problemático porque ellos forman un sub-set *H* = *T* – *L,* cuyos sujetos intentan enumerar por mero conteo de los elementos dejados caer. Como resultado, en el nivel IA no existen implicaciones entre ordinales y cardinales (excepto en el sentido simple que ‘n’ caídas implican n elementos cardinales en *L*). Por el contrario, ellos no son diferenciados, de modo

que dejar caer un simple elemento 'n' está supuesto a obligar que el todo *T* vaya de *H* a *L*. Todos los avances de ésta reacción no-diferenciada ("todo ó nada") en el nivel IA a las operaciones aditivas y sustractivas en el nivel III son debidas a una elaboración de nuevos significados y de las implicaciones a que ellos obligan. En el nivel IA, dejar caer unas pocas canicas representa una forma absoluta, y esto es porque el significado está determinado por acciones materialmente ejecutadas (sin anticipaciones) las cuales no tienen relación sea lo que fuera con el todo *T* ó con las remanentes en *H* (en las cuales ninguna acción es efectuada). En contraste, en el nivel IB las caídas adquieren un significado de "algo" entre otros, y esto en cambio da un significado imprevisto a los otros elementos; ellos son un "remanente", aunque aún no está relacionado a un todo.

Para dar algunos ejemplos: Al nivel IA, *Cat* dice que "nosotros nunca podemos tener siete con diez", y por tanto refutando la idea de partir un set. *Aro* al nivel IB se refiere a aquellos que "no han sido puestos aún". Esta respuesta incluye el nuevo y esencial significado de un "remanente", pero uno que no puede ser conocido por falta de acciones realizadas en el: "Nosotros no podemos saber si no hemos hecho nada". Por contraste *Lav* asume que este remanente debe ser numeroso ("no demasiado cerca" del límite que separa 4 de 5). Por otro lado, *Cri* y otros desean contar éstos elementos, pero ellos lo hacen solo por conteo desde el número de caídas (por lo tanto $H = T$, la que recuerda las reacciones del nivel IA). *Mar* invoca simetría, de acuerdo a la cual *H* "tiene cinco" como *L*. Sin embargo, el cambio critico en significados ocurre en el nivel II, cuando el "remanente" en *H* es contado separadamente. No hay aún una referencia sistemática para el todo, pero los sujetos "explícitamente hablan de dos sub-sets: *Pat* dice que los primeros cuatro (en *H*) no cuentan", significando que ellos ya son conocidos debido a las caídas; ella agrega "Yo cuento las otras (en *H*) otra vez" después de una forma de introspección a través de la cual ella descubre que el "remanente" debe ser considerado separadamente ("Ah! Eso es, 7 quedan", ella dice). En el nivel III, al final, las adiciones y sustracciones que fueron implícitas en el nivel II adquieren el significado de operaciones. Como tales, ellas están subordinadas a la composición ó descomposición de un todo el cual es constantemente invocado por virtud de las implicaciones básicas: T insertar signo aquí $B + H$, ó $H = T - B$.

En la situación II, las inferencias claramente guían a un logro temprano de implicaciones, como es también el caso cuando la situación I es presentada con menos numerosos sets y sub-sets. Todos éstos cálculos, aún si el sujeto los expresa a través de declaraciones, son implicaciones entre acciones y operaciones. Es algunas veces cuestionado si cada cálculo involucra algún sistema de inferencias: esto es obvio si uno introduce la noción de implicaciones de acción.

SECCIÓN II: CONTAR EN UN ORDEN CIRCULAR

Podría ser interesante completar la sección precedente examinando cómo los niños maniobran para determinar cardinales y especialmente ordinales cuando son presentados con una colección de elementos en un orden circular. Por ejemplo, preguntaremos cuántos botones hay en un círculo conteniendo 10 u 11, luego preguntaremos cuántos de ellos podrían ser los primeros, los segundos, los terceros ó los últimos elementos. Podremos distinguir tres niveles:

En el nivel IA, los niños no piensan inmediatamente en marcar los elementos con que ellos empezaron, y su conteo termina con ó dos unidades muy pocas ó

muchas. Sobre todo, ellos no ven que uno encuentra tanto segundos elementos como primeros y aún el doble si el orden es revertido. **[30]**

***SAN* (5; 0)** cuenta los elementos en un círculo de 10 sin marcar el primero y alcanza un total de 11. "Cuál es el 2º?" *Ese.* "Podría otro ser el 2º?" *No.* "Por qué?" *Porque de otro modo existe un error.* "Podría usted empezar aquí (opuesto)?" *Sí* (ella cuenta uno, dos). "Puede haber otro 2º?" *No.* "Y cuando comienza por cualquier lado?" *Sí, allí* (ella muestra tres pares sucesivos 1, 2), diciendo ahora *uno, dos,* y luego *este antes, ese 2º.* "Cuántos 2º usted tiene hasta aquí?" *Tres.* "Podemos encontrar más?" *No.* "Por qué?" *Porque no hemos contado una vez más aún.* "Trate". Ella cuenta pares separados *uno, dos; uno,* dos*;* y así sucesivamente alrededor de todo el círculo. Comenzando otra vez en orden inverso, cuando ella encuentra un elemento que ya había sido contado "dos", ella lo pone en el centro del círculo. "Cuántos 3º hay allí?" (mismo procedimiento). "Cuántos 1º?" *Todos ellos porque yo podría haberlos tomado de primero.*

***ANI* (5; 9).** El círculo incluye 7 elementos. Ella cuenta 8. "No, usted contó éste dos veces. Cuál es *el* 2º?" *Aquel.* "Si empezamos aquí, cuánto hará?" *También 7.* "Por qué" *Yo sé* (ella cuenta con otro punto de partida). "Cuál es el 2º?" *Ese.* Cuántos botones pueden ser el 2º?" (Ella cuenta 3 pares sucesivos:) *Tres y también aquel* (el 7º). "Y el 3º?" *Tres* (ella muestra 3 tríos). El experimentador pone 5 elementos en una fila. "Cuántos elementos hay allí?" *Cinco.* "Y de este modo (orden inverso)?" *Es lo mismo.* "Cómo es que ese es el 4º una vez y el 2º la otra vez?" *Porque está antes que 5 aquí.* "Y del otro modo?" *Ese es el 4º.*

***PAT* (6; 8)** acuciosamente cuenta los elementos en un círculo de 11. "Cuántos 2º hay?" *Aquel* (a la izquierda del primer elemento contado) *y ese* (a la derecha del mismo elemento contado): *Dos!* "Eso es todo?" *Cinco, no 2.* "No, todos juntos ((si el punto de partida es cambiado)". *Otra vez, 2 de ellos serían el 2º.* "Es eso todo de ellos?" *Ocho.* "Cuántos 3º?" *Nueve!* "Y 1º?" *Todos* "Y 11º?" *Dos.* "Cómo es que 11 botones son 1º y solo dos son 11º?" ...*Yo no sé.*

En orden de comprender mejor el significado de éstas reacciones iniciales, primero examinemos los niveles IB y II. En el nivel IB, existe una mezcla de entendimientos con respuestas semejantes a las precedentes:

***AND* (6; 10).** El correctamente cuenta los 11 elementos en el círculo: "Cuántos de ellos son el 2º?" *Uno* (en una dirección) *no, 2* (la otra dirección). "Algo más?" *Si, el otro sentido* (con el punto de partida opuesto al 1º). "Algo más?" *Mucho* (él cuenta los pares como si cada elemento tuviera solo un 2º en el mismo orden de rotación). *Eso hace* 5. "Cuántos 3º?" *Cuatro.* "Cuántos 11º?" *Todos! No, solo uno* (el último). "Y si contamos así" (nuevo punto de partida)? *Ah! Si cambiamos, para cada uno* (término escogido por el 1º) *hay un 11* (perspicacia). "Por qué?" *Porque se transforma un poco* (por ejemplo, porque los primeros y por consiguiente los últimos siguen el uno al otro en un orden cíclico). "Cuántos 3º?" (El no generaliza y continúa haciendo tripletas): *Cuatro, no 3!* (con los últimos 2 botones) "Como es eso que hay once 11º; y solo tres 3º?" *Porque 3 dan cabida a 4 es igual a 11. No, porque solo hay tres 3º* (tripletas).

En el nivel II (7-8 años), éstos problemas están resueltos. Aquí hay dos ejemplos (el primero es notoriamente precoz):

***BRI* (5; 0).** Con 7 botones, él marca un punto de partida y muestra un 2º en cada lado. "Hay allí otros?" *Si* (él toma un 3º "el primero" y muestra los elementos vecinos). "Más?" *Sí, donde quiera desde que todos ellos están lado con lado.* La misma respuesta para los elementos siguientes, sin separa ningunos pares, tripletas, etc.

***HEL* (8; 10).** Con un círculo de 13: *Para contarlos, debemos conocer de dónde comenzamos.* "Podría éste (6º) ser el 2º?" *Sí, podemos, yo comencé con ése* (el precedente): etc. *Todos ellos pueden ser el 2º, pero no todos al mismo tiempo, cada uno a su turno porque podemos comenzar con otro lado.* "Dos de ellos pueden ser el 2º al mismo tiempo?" *Sí, pero no contarlos* (conteo cardinal): *No contamos uno, dos, tres. cuatro!* Sin embargo, para alcanzar la suma (cardinal), cualquier orden puede ser adoptado: *Tenemos la misma cantidad, no ha cambiado.* Diez dulces son luego colocados en una línea recta: *Eso es* 10. "Podemos comenzar por cualquier lugar?" *Sí* (orden inverso). "Que tal aquí (3º a la izquierda)?" *Sí* (ella lo marca). *Contamos éste* (310) *luego que* (1-2). "Puede éste (7º) ser el 2º?" *Sí, podemos* (ella comienza con 6).

En el nivel II, con este procedimiento experimental, existen claras diferencias también como implicaciones mutuas entre cardinación y ordinación. De acuerdo a las definiciones que hemos recordado al principio de la Sección 1-4, un número cardinal es un set el cual es conservado cualquiera que sea el orden de enumeración de sus elementos. Esto es lo que *Hel* asevera cuando ella dice que "tenemos el mismo número, el no ha cambiado". Recíprocamente, un número ordinal es [uno de] una secesión de rangos, cada uno de los cuales está determinado por el cardinal de sus predecesores. Por lo tanto, en el nivel II, 'n' elementos conducirán (cuando se cuente en ambas direcciones) a 2n segundos elementos, 2n terceros elementos, y así sucesivamente. Considerando que éstos significados e implicaciones son entendidos del nivel II en adelante, existe en el nivel IA la no diferenciación de ordinales y cardinales que notamos en la sección I: Para una suma dada 'n', el número del 2º, 3º etc., elementos que no son 2n, lo que es, que ellos no dependen del todo 'n', pero en pequeños sub-sets separados (pares, tripletas, etc.) los cuales son ambos cardinales y ordinales. Este avance en significados cuando se va de los niveles IA y IB al nivel II no es justo un asunto de diferenciaciones y mutuas implicaciones, sino también de una relativización básica de las nociones usadas.

---

[28] Una niña de 6 años de edad me explicó una vez el significado espacial de "antes" y "después" en su declaración "3 viene después de 4 y 5 viene antes de 4". Ella dijo que los números están arreglados en orden, comenzando con uno, y según usted se mueve a lo largo de ellos, nota cuáles números aún están adelante (antes) y cuáles están justamente detrás de usted (después). Tal imagen podría explicar la falla de *Bri* para comprender los significados temporales del entrevistador, de éstas dos palabras. (J:E:)

[29] Inhelder, B., & Piaget, J. *The Early Growth of Logic in the Child.* New York: Norton, 1969.

[30] Esta declaración destaca la importancia aquí con las intenciones. Un segundo elemento es parte de una secuencia – por ejemplo, yo puedo ser el 2º de la derecha y el segundo de la izquierda en una fila de tres personas, y por lo tanto ser dos segundos elementos, de una vez. (J. E.)

5
RELACIONES DENTRO DE UN OBJETO

Con R. Zubel y G. Merzaghi

El siguiente estudio puede parecer trivial porque trata con problemas de lo más elemental. Sin embargo, debemos examinar cuál es el concepto de los objetos involucrados desde el punto de vista de significados e implicaciones de acción y, para éste propósito, los problemas menos complejos son los más instructivos.

Desde un punto de vista general, los dos significados de un objeto son, subjetivamente, qué se puede hacer con el y, objetivamente, qué ha logrado y cómo está compuesto. Lo anterior no puede ser separado del significado de acciones, lo cual no trataremos en el presente capítulo.

El último significado